A MÁSODRENDŰ
ÉS
KÉT FÜGGETLEN VÁLTOZÓT TARTALMAZÓ

PARCZIÁLIS DIFFERENCZIÁLEGYENLETEK

ELMÉLETE.

IRTA

KŐNIG GYULA

L. TAG.

(A M. TUD. AKADÉMIA 1884. NAGYGYŰLÉSÉN A BÉZSÁN-DÍJJAL KÍTÜNTETETT PÁLYAMUNKA.)

A M. T. AKADÉMIA III. OSZTÁLYÁNAK KÜLÖN KIADVÁNYA.
1884. II.

Ára 60 kr.

BUDAPEST, 1885.

A MÁSODRENDŰ

ÉS

KÉT FÜGGETLEN VÁLTOZÓT TARTALMAZÓ

PARCZIÁLIS DIFFERENCZIÁLEGYENLETEK

ELMÉLETE.

IRTA

KŐNIG GYULA

L. TAG.

(A M. TUD. AKADÉMIA 1884. NAGYGYÜLÉSÉN A BÉZSÁN-DÍJJAL KITÜNTETETT PÁLYAMUNKA.)

A M. T. AKADÉMIA III. OSZTÁLYÁNAK KÜLÖN KIADVÁNYA.
1884. II.

BUDAPEST, 1885.

Budapest, 1885 Az Athenaeum r. t. könyvnyomdája.

A másodrendű és két független változót tartalmazó differencziálegyenletek elméletének alapjait AMPÈRE fejtette ki két hires értekezésben, mely 1814-ben, illetőleg 1820-ban jelent meg.[1] Ama nagy tevékenység daczára, melyet azóta a mathematika minden fejezetében kifejtettek, aránylag nagyon kevés uj az, a mi eddig AMPÈRE vizsgálataihoz csatlakozott. A legtöbb dolgozat még a differencziálegyenletek amaz osztályára vonatkozik, melynek első integrálјai vannak és melynek integrácziója ennek következtében az úgynevezett MONGE-AMPÈRE-féle módszerek segítségével végezhető. Ez amaz osztály, melynek tárgyalása AMPÈRE-nál már annyira teljes, a mennyire ezt az elsőrendű differencziálegyenlet-rendszerekre vonatkozó ismeretek hiánya engedte. A megmaradt hézagot betöltötték BOOLE[2] és BOUR[3] értekezései, melyekkel együtt még fölsorolandó IMSCHENETSKY[4] nagy értekezése, ki nem csak hogy könnyebben hozzáférhetőkké tette AMPÈRE-nek nem épen világos tárgyalásait, hanem egyszersmind számos becses részlettel is gazdagította a kérdéses egyenletosztály elméletét.

Uj és általánosabb egyenletosztályok vizsgálatával találkozunk DARBOUX, LÉVY és HAMBURGER dolgozataiban, melyek az itt előterjesztendő eredményekkel szorosabb kapcsolatban állanak és a melyeknek viszonyáról a kifejtendő általános elmélethez később részletesebben kell majd megemlékeznünk. Ide tartozik még MOUTARD[5] közleménye, a ki megállapította, hogy a második differencziálhányadosok közül csak a $\frac{d^2 z}{dx\,dy}$-ot tartalmazó egyenletnek mikor lesz oly általános integrálja,

[1] Journal de l'école politechnique, t. X. et XI.
[2] Crelle's Journal, Bd. LXI.
[3] Journal de l'école polytechnique t. XXII.
[4] Grunert Archiv. Bd. LIV.
[5] Comptes rendus T. LXX., p. 834.

mely AMPÈRE terminologiájában »intégrale de première espèce« valamint LIE-nek néhány evvel kapcsolatban álló és legujabban közzétett kisebb czikke. Sajnos, hogy a három franczia szerző eredményeit eddig csak rövid kivonatokban, bebizonyítások nélkül adta és az igért értekezések még nem jelentek meg, ámbár az utolsó ama közlemények sorából 1872-ből való.

Midőn a probléma nehézségeit jól ismerve, mégis a tek. akadémia által kitűzött pályakérdéssel kezdtem foglalkozni, erre leginkább azon meggondolás adott bátorságot, hogy Jacobi korszakot alkotó vizsgálatai, valamint az ezeket követő munkálatok alapján az elsőrendű differencziálegyenletek elmélete befejezettnek tekinthető, és igy ma már rendelkezésünkre állanak ama szükséges előzmények, melyeknek hiánya azelőtt már magában is elég volt arra, hogy a vizsgálatot meddővé tegye. Kapcsolatos evvel, hogy elhagyva az AMPÈRE által választott útat, igyekezetem odairányult, hogy ama módszereket, melyeket JACOBI az elsőrendű differencziálegyenleteknél megállapított, a legközelebbi magasabb esetekre átvigyem. A választott út helyesnek bizonyúlt, mert nem csak hogy sikerült a másodrendű differencziálegyenletek *integrácziójának elméletét* teljesen megállapitani, hanem már ezen értekezés is bizonyítéka annak, hogy ugyane módszerek nagyobb elvi nehézség nélkül akkor is alkalmazhatók, midőn akár a differencziálegyenlet rendje, akár a változók száma nagyobb 2-nél.

AMPÈRE vezérgondolatai majd csak az elmélet magasabb fejlődésénél lesznek érvényesítendők. Hogy, mint AMPÈRE akarta, fölállítsuk amaz analytikai alakot, mely az egész, valamely másodrendű differencziálegyenlet által definiált függvénysokaságot készen megadja, arra az integráczió folyamatának ismerete a legjobb segédeszköz. Itt is az integráczió elmélete egyszerűbb az integrálok elméleténél és úgy hiszem, hogy az itt előadandó módszerek egyengetik majd az útat arra, hogy AMPÈRE-nek a modern mathematika legmélyebb és legszellemesebb termékeihez tartozó gondolatait értékesítsük.

Ily nagyobb dolgozatnál bevezetésképen részletes kivonatban előadni a használt módszereket és a nyert eredményeket, nagyon nehéz és mégsem hálás munka, a mennyiben a részletes kifejtés rendesen sokkal könnyebben áttekinthető, mint a kivonat. Szorítkozom tehát a főszempontok és legfontosabb eredmények előleges kiemelésére.

Az elsőrendű differencziálegyenletek integrácziójának elméletében a leglényegesebb pont, hogy bármely ily egyenlet egy teljes integráljának meghatározását egy másik több független változót tartalmazó, de *lineáris* elsőrendű parcziális differencziálegyenlet egy partikuláris integráljának meghatározására tudjuk visszavezetni. Két körülmény következtében, mely a magasabbrendű differencziálegyenleteknél többé nem talál analogonra, evvel az integráczió munkája be is van fejezve. Az elsőrendű és lineáris parcziális differencziálegyenlet megoldása t. i. mindenkor aequivalens föladat egy bizonyos totál differencziálegyenlet-rendszer megoldásával, és így tehát a parcziális differencziálegyenlet integrácziója vissza van vezetve totál differencziálegyenletek integrácziójára. A második körülmény, mely miatt ez által az integráczió teljesen befejeztetett, az, hogy *egy* teljes integrálból *minden* más integrált ismeretes műveletek segítségével lehet levezetni.

Evvel szemben hangsúlyozandó, hogy semmi jogos alapon nem várhatjuk azt, hogy minden magasabbrendű parcziális differencziálegyenlet integrácziója visszavezethető totál differencziálegyenlet-rendszerek megoldására; — ép úgy mint nem követelhetjük minden ötödfokú egyenletnek algebrai megoldását. — Az állandók variácziójának módszere pedig, hogy ily általánosságban sikerrel alkalmazható legyen, épen ahhoz van kötve, hogy az integrácziót totál differencziálegyenletek tárgyalására lehessen visszavezetni.

Egyik főeredményünk most már abból áll, hogy *bármely másodrendű differencziálegyenlet egy teljes integráljának meghatározását egy több független változót tartalmazó, de lineáris differencziálegyenlet partikuláris integráljának meghatározására vezethetjük vissza, ép úgy mint az elsőrendű differencziálegyenleteknél.*

E meghatározás olyképen történik, hogy ama partikuláris megoldás, egyenlővé téve egy tetszőleges állandóval, az előforduló jelzések jelentésének változtatása után direkte szolgáltat egy második másodrendű differencziálegyenletet, melynek az eredetileg adottal közös legáltalánosabb integrálja még 4 tetszőleges állandót tartalmaz, még pedig úgy, hogy erre vonatkozólag teljes integrál. E közös integrál meghatározása totál differencziálegyenlet-rendszer megoldása által történik.

Általánosságban ilyen *egy* tetszőleges állandót tartalmazó differencziálegyenletnek általánosabb közös megoldása valamely adott differencziálegyenlettel nincs is. Ez alúl csak a *differencziálegyenleteknek egy bizonyos osztálya* tesz kivételt, még pedig úgy, hogy képezhetők differencziálegyenletek, melyeknek az eredetinek végtelen sok (de azért nem minden) teljes integrálja megfelel. Hogy ebbe az osztályba tartozik-e valamely differencziálegyenlet, azt megitéljük két elsőrendű lineár differencziálegyenlet-rendszer fölállítása által. Ha e rendszerek egyike az integrábilitási föltételeknek megfelel, minden partikuláris integrálja tetszőleges állandóval egyenlítve, adja a keresett második differencziálegyenletet. Még pedig ha csak egy rendszernek is két egymástól független integrálja van, az eredeti differencziálegyenletnek bármely integrálját totál differencziálegyenlet-rendszer megoldása által nyerhetni. Ha csak egy független integrálja van a rendszernek, végtelen sok, de nem minden integrált nyerünk; ez integrálok sokasága *általánosított* értelemben első integrál, a mennyiben a meghatározott integrálok sokasága ugyanolyan, mint az egy első integrálban foglalt integrálok sokasága, mikor t. i. ily első integrál létezik.

Míg az előbb fölhozott viszonyoknál fogva a teljes integrál meghatározására vonatkozó vizsgálattal az elsőrendű parcziális differencziálegyenleteknél az integráczió műveletét be is fejeztük, e vizsgálat már másodrendű egyenleteknél az integráczió elméletében csak az első lépést teszi.

Az általános elmélet egy ujonnan bevezetendő fogalmon, *a teljes integrál általánosításán* alapszik. Teljes integrálnak nevezzük majd mindazon megoldásokat, melyek az adotton kivül semmi más másodrendű differencziálegyenletnek nem tesznek eleget. Erre szükséges, hogy legalább 5 tetszőleges állandót tartalmazzon, és ha az állandók száma nem nagyobb, akkor ez — a kifejezés eddigi értelme szerint — teljes integrál. Az $5+k$ tetszőleges állandót tartalmazó teljes integrált majdan a következőkben k-ad *fajú* teljes integrálnak nevezzük.

Az adott differencziálegyenletnek egy $5 + 2\ (k - 2)$ *tetszőleges állandót tartalmazó teljes integrálja ismét meghatározható egy másik, több független változót tartalmazó, de lineáris másodrendű differencziálegyenlet partikuláris megoldásából.*

E meghatározás ismét úgy történik, hogy a jelzéseknek más értelmet adva, e partikuláris integrál tetszőleges állandóval egyenlővé téve, k-adrendű differencziálegyenletet szolgáltat, melynek az eredetivel közös legáltalánosabb integrálja még $2k$ tetszőleges állandót tartalmaz, még pedig úgy, hogy erre nézve teljes integrál. E közös integrál meghatározása totál differencziálegyenlet-rendszer megoldása által történik.

Általánosságban ez ismét a legáltalánosabb közös integrálja a két egyenletnek. De minden egész számra, $k \geqq 2$ találni a másodrendű differencziálegyenletek egy bizonyos osztályát, mely kivételt tesz, azaz a melyre vonatkozólag föl-állíthatók k-adrendű differencziálegyenletek úgy, hogy ebben az eredeti egyenletnek végtelen sok (de nem minden) $2k + 1$ állandót tartalmazó teljes integrálja bennfoglaltatik. Ismét kriteriumokat nyerünk arra nézve, vajjon egy adott egyenlet ilyen alkatú vagy nem és az egész elmélet ép úgy alakúl, mint a legegyszerűbb ($k = 2$) esetben.[1]

Így a másodrendű differencziálegyenleteknek végtelen sok osztályát nyerjük, melyeknek integrácziója visszavezethető totál differencziálegyenletekére, még pedig úgy, hogy kész számítási eljárásunk van annak fölismerésére, vajjon valamely adott differencziálegyenlet így tárgyalható-e vagy sem, valamint egyszersmind teljesen meg van adva a módszer, melynek segítségével az integrácziót valóban végezhetjük.

Sőt ha Lévy-nek később részletesebben fölhozandó tételeit, melyeket ő bebizonyítás nélkül adott, föltételezzük, azt lehet kimutatni, hogy *a kijelölt differencziálegyenletek az összes*

[1] A $k = 1$ esete nem ad már teljes integrált, hanem csak 3 tetszőleges állandót tartalmazó megoldást. Ezen esetet, melynek tárgyalása némileg eltér a többiétől, e helyen nem tartottam részletesen kifejtendőnek, mert a mit itt nyerünk, lényegben nem más, mint az úgynevezett Monge-Ampère-féle módszerek megállapítása.

másodrendű parcziális differencziálegyenletek, melyeknek integráczióját totál differencziálegyenletek integrácziójára visszavezetni lehetséges.

Amaz egyenlet-osztály, melyet Darboux mint integrálhatót kijelölt, de a nélkül, hogy az integrálásra módszert adott volna, mint speczіális alosztály jelentkezik a kijelölt alakok közt, a mely alosztálynak ismét legegyszerűbb esete $k = 2$ az, melyet Hamburger tárgyalt.

I.

Teljes és föltétlenül integrálható differencziálegyenlet-rendszerek.

1. A másodrendű és két független változót tartalmazó differencziálegyenletek elméletében a legegyszerűbb probléma az oly rendszer megoldását követeli, mely három simultán differencziálegyenletből áll. Legyenek ezen egyenletek:

$$
\begin{aligned}
F_1(x, y, z, p, q, r, s, t) &= 0\\
F_2(x, y, z, p, q, r, s, t) &= 0\\
F_3(x, y, z, p, q, r, s, t) &= 0
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

hol az ismeretes

$$\frac{dz}{dx} = p, \quad \frac{dz}{dy} = q,$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = r, \quad \frac{d^2z}{dx\,dy} = s, \quad \frac{d^2z}{dy^2} = t$$

jelöléseket használjuk. Föltészszük, hogy ezen egyenletrendszer megoldása r, s, t szerint teljesen rendes viszonyokat mutat, hogy nevezetesen nem tartalmaz ellenmondást, hogy nem elégíthető ki az által, hogy csak egy vagy két relácziót állapítunk meg r, s és t közt, hogy nincsenek úgynevezett végtelen megoldásai, valamint egyenlő gyökrendszerei sem.

Ekkor az F_1, F_2, F_3 függvények determinánsa r, s, t szerint nem tünik el, akkor sem, ha az r, s, t egy összetartozó értékrendszerét helyettesítjük benne.

Egyenleteink e szerint r, s, t szerint megoldott alakban is irhatók:

$$
\begin{aligned}
r &= \varphi(x, y, z, p, q)\\
s &= \psi(x, y, z, p, q)\\
t &= \chi(x, y, z, p, q)
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

Tekintetbe véve a z, p, q, r, s, t közt fönnálló összefüggést, föladatunk tehát úgy is fogalmazható, hogy a z, p, q meghatározandók, mint az x és y függvényei úgy, hogy legyen:

$$\begin{aligned}
\frac{dp}{dx} &= \varphi\,(x, y, z, p, q), & \frac{dp}{dy} &= \psi\,(x, y, z, p, q) \\
\frac{dq}{dx} &= \psi\,(x, y, z, p, q), & \frac{dq}{dy} &= \chi\,(x, y, z, p, q) \\
\frac{dz}{dx} &= p, & \frac{dz}{dy} &= q.
\end{aligned} \tag{3}$$

Evvel a tárgyalandó probléma ismeretes alakra van hozva. Az utoljára nyert rendszer integrálása ugyanis tudvalevőleg, ha egyáltalában lehetséges, azaz ha *léteznek* megfelelő z, p, q függvények, egy közönséges (totál) differencziálegyenlet rendszerére vezethető vissza.[1]

A föladat lehetőségére bizonyos integrabilitási föltételek kielégítése szükséges, számra nézve három, melyek:

$$\frac{d\varphi}{dy} = \frac{d\psi}{dx}$$

$$\frac{d\psi}{dy} = \frac{d\chi}{dx}$$

$$\frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx}$$

de ezek közül a harmadik $\frac{dp}{dy}$ és $\frac{dq}{dx}$ identikus értékénél fogva mindig ki van elégítve, és így csak két föltétel marad, mely részletesen irva:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}q + \frac{\partial\varphi}{\partial p}\psi + \frac{\partial\varphi}{\partial q}\chi &= \frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial z}p + \frac{\partial\psi}{\partial p}\varphi + \frac{\partial\psi}{\partial q}\psi \\
\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial z}q + \frac{\partial\psi}{\partial p}\psi + \frac{\partial\psi}{\partial q}\chi &= \frac{\partial\chi}{\partial x} + \frac{\partial\chi}{\partial z}p + \frac{\partial\chi}{\partial p}\varphi + \frac{\partial\chi}{\partial q}\psi
\end{aligned} \tag{4}$$

Ha e föltételek identikusan vannak kielégítve, akkor z és vele együtt p és q is mint három tetszőleges állandót tartal-

[1] *L. A. Mayer* »Ueber unbeschränkt integrable Systeme etc.« Math. Annalen V. pag. 448 és *König Gyula* »A Hamilton-féle rendszerek stb.« Akad. ért. VIII. köt. X. sz. 15. l.

mazó függvény lesz meghatározva és ebben az esetben az adott (1) vagy (2) alatti rendszert, úgy mint ez a (3) alatti, vele aequivalens rendszernél szokásos, *föltétlenül integrálható teljes rendszer*nek akarjuk nevezni. Ez az eset az egyetlen, mely bennünket érdekel, hol az ily rendszerre vonatkozó eredményeket csak mint a másodrendű és két független változót tartalmazó differencziálegyenletek általános elméletének előkészítését tárgyaljuk. (Ha a (4) alatti relácziók nem identikusak, akkor a további vizsgálat az előbb idézett módszerek szerint a z, p, q-nak megfelelő, de *háromnál kevesebb* tetszőleges állandót tartalmazó függvényalakokat adja, vagy pedig mutatja, hogy a föltételeket kielégítő függvények egyáltalában nem léteznek.)

2. A megelőzőkben kifejtettük ama két föltételt, mely szükséges és elegendő arra, hogy az (1) alatti teljes rendszer föltétlenül integrálható legyen. De e föltételek alakja olyan, hogy a rendszernek r, s, t szerinti megoldásából keletkező függvények ismeretét követeli. Az integrabilitás föltételei azonban így is irhatók:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dy} &= \frac{ds}{dx} \\ \frac{ds}{dy} &= \frac{dt}{dx} \end{aligned} \tag{5}$$

és az r, s, t függvényeknek, melyek implicite (1) által adva vannak, e differencziálhányadosai könnyen kifejthetők.

Jelöljük ugyanis $\left(\frac{df}{dx}\right)$ - szel, illetőleg $\left(\frac{df}{dy}\right)$ - nal $f(x, y, z, p, q, r, s, t)$-nek x, illetőleg y szerint vett teljes differencziálhányadosát, *a mennyiben r, s, t-t állandónak tekintjük,* azaz legyen

$$\begin{aligned} \left(\frac{df}{dx}\right) &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} p + \frac{\partial f}{\partial p} r + \frac{\partial f}{\partial q} s \\ \left(\frac{df}{dy}\right) &= \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} q + \frac{\partial f}{\partial p} s + \frac{\partial f}{\partial q} t \end{aligned} \tag{6}$$

Ha most az (1) alatti egyenleteket először x, azután y szerint teljesen differencziáljuk, oly rendszereket nyerünk, melyekből a keresett differencziálhányadosok meghatározhatók. Lesz ugyanis:

$$\left(\frac{dF_1}{dx}\right) + \frac{\partial F_1}{\partial r}\frac{dr}{dx} + \frac{\partial F_1}{\partial s}\frac{ds}{dx} + \frac{\partial F_1}{\partial t}\frac{dt}{dx} = 0$$
$$\left(\frac{dF_2}{dx}\right) + \frac{\partial F_2}{\partial r}\frac{dr}{dx} + \frac{\partial F_2}{\partial s}\frac{ds}{dx} + \frac{\partial F_2}{\partial t}\frac{dt}{dx} = 0$$
$$\left(\frac{dF_3}{dx}\right) + \frac{\partial F_3}{\partial r}\frac{dr}{dx} + \frac{\partial F_3}{\partial s}\frac{ds}{dx} + \frac{\partial F_3}{\partial t}\frac{dt}{dx} = 0$$

és

$$\left(\frac{dF_1}{dy}\right) + \frac{\partial F_1}{\partial r}\frac{dr}{dy} + \frac{\partial F_1}{\partial s}\frac{ds}{dy} + \frac{\partial F_1}{\partial t}\frac{dt}{dy} = 0$$
$$\left(\frac{dF_2}{dy}\right) + \frac{\partial F_2}{\partial r}\frac{dr}{dy} + \frac{\partial F_2}{\partial s}\frac{ds}{dy} + \frac{\partial F_2}{\partial t}\frac{dt}{dy} = 0$$
$$\left(\frac{dF_3}{dy}\right) + \frac{\partial F_3}{\partial r}\frac{dr}{dy} + \frac{\partial F_3}{\partial s}\frac{ds}{dy} + \frac{\partial F_3}{\partial t}\frac{dt}{dy} = 0$$

Ezen egyenletrendszerekből

$$\frac{dr}{dx},\quad \frac{ds}{dx},\quad \frac{dt}{dx}$$

illetőleg

$$\frac{dr}{dy},\quad \frac{ds}{dy},\quad \frac{dt}{dy}$$

kiszámítható, mert mindkét esetben az ismeretlenek együtthatóinak determinánsa nem más, mint az F_1, F_2, F_3 függvények determinánsa r, s, t szerint, mely mint előbb megállapítottuk, nem zerus.

Ha az (5)-ben fellépő differencziálhányadosokat kiszámítjuk és az e számításnál előforduló determinánsokat röviden jelöljük, az integrabilitási föltételek lesznek:

$$\frac{Y_r}{D} = \frac{X_s}{D}$$
$$\frac{Y_s}{D} = \frac{X_t}{D} \qquad (7)$$

hol D az illető függvénydetermináns. Kell pedig, hogy ha r, s, t értékeit ide behelyettesítjük, a nyert relácziók identitások legyenek, azaz a mint a dolgot egyenlet megoldása nélkül kimondhatjuk, kell, hogy ha az (1.) segítségével (7.)-ből r, s, t-t elimináljuk, identitásokat nyerjünk, vagyis hogy *a (7) alatti egyenletek az (1.)-ben foglaltaknak algebrai következményei legyenek.*

Azonban D nem tünhetik el sem identice, sem pedig az r, s, t értékeinek helyettesítése után, mert ekkor az (1.) egyenletrendszerben föllépnek ama kivételes esetek, melyeket kezdettől fogva kizártunk. Így tehát a (7.)-ben elhagyhatjuk a D nevezőt, és így *annak föltétele, hogy (1.) föltétlenül integrálható teljes rendszer legyen, az, hogy*

$$Y_r = X_s\,, \qquad Y_s = X_t$$

az r, s, t eliminácziója után identitások legyenek.

Helyén lesz most még e két föltétel részletes determinánus alakját kiirni, melyet a következőkben folyton használunk. Ezek:

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{dF_1}{dy}\right), & \frac{\partial F_1}{\partial s}, & \frac{\partial F_1}{\partial t} \\ \left(\frac{dF_2}{dy}\right), & \frac{\partial F_2}{\partial s}, & \frac{\partial F_2}{\partial t} \\ \left(\frac{dF_3}{dy}\right), & \frac{\partial F_3}{\partial s}, & \frac{\partial F_3}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial r}, & \left(\frac{dF_1}{dx}\right), & \frac{\partial F_1}{\partial t} \\ \frac{\partial F_2}{\partial r}, & \left(\frac{dF_2}{dx}\right), & \frac{\partial F_2}{\partial t} \\ \frac{\partial F_3}{\partial r}, & \left(\frac{dF_3}{dx}\right), & \frac{\partial F_3}{\partial t} \end{vmatrix} \tag{8a}$$

és

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial r}, & \left(\frac{dF_1}{dy}\right), & \frac{\partial F_1}{\partial t} \\ \frac{\partial F_2}{\partial r}, & \left(\frac{dF_2}{dy}\right), & \frac{\partial F_2}{\partial t} \\ \frac{\partial F_3}{\partial r}, & \left(\frac{dF_3}{dy}\right), & \frac{\partial F_3}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial r}, & \frac{\partial F_1}{\partial s}, & \left(\frac{dF_1}{dx}\right) \\ \frac{\partial F_2}{\partial r}, & \frac{\partial F_2}{\partial s}, & \left(\frac{dF_2}{dx}\right) \\ \frac{\partial F_3}{\partial r}, & \frac{\partial F_3}{\partial s}, & \left(\frac{dF_3}{dx}\right) \end{vmatrix} \tag{8b}$$

2. Ha az eddig tárgyalt rendszer egyik egyenletét r szerint megoldott alakban irjuk és r értékét a másik két egyenletbe behelyettesítjük, az egész rends er a következő alakra hozható:

$$\begin{aligned} r + f\,(x, y, z, p, q, s, t) &= 0 \\ u\,(x, y, z, p, q, s, t) &= 0 \\ v\,(x, y, z, p, q, s, t) &= 0 \end{aligned}$$

A föltétlen integrálhatóság feltételei akkor a következők lesznek:

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{df}{dy}\right), & \frac{\partial f}{\partial s}, & \frac{\partial f}{\partial t} \\ \left(\frac{du}{dy}\right), & \frac{\partial u}{\partial s}, & \frac{\partial u}{\partial t} \\ \left(\frac{dv}{dy}\right), & \frac{\partial v}{\partial s}, & \frac{\partial v}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \left(\frac{du}{dx}\right), & \frac{\partial u}{\partial t} \\ \left(\frac{dv}{dx}\right), & \frac{\partial v}{\partial t} \end{vmatrix}$$

és

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{du}{dy}\right), & \frac{\partial u}{\partial t} \\ \left(\frac{dv}{dy}\right), & \frac{\partial v}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial s}, & \left(\frac{du}{dx}\right) \\ \frac{\partial v}{\partial s}, & \left(\frac{dv}{dx}\right) \end{vmatrix}$$

E relácziókban még $r = -f$ helyettesítendő. Különös fontosságú lesz azon eset, *midőn a relácziók közvetetlenül az s és t értékeinek helyettesítése nélkül is identitások lesznek. Mert ez szükséges és elegendő feltétele annak, hogy az általánosabb rendszer*

$$\begin{aligned} r + f(x, y, z, p, q, s, t) &= 0 \\ u(x, y, z, p, q, s, t) &= a_1 \\ v(x, y, z, p, q, s, t) &= a_2 \end{aligned} \tag{10}$$

hol a_1 és a_2 tetszőleges állandókat jelentenek, szintén föltétlenül integrálható legyen.

Hogy e föltétel elegendő, már az eddigiekből is világos. Más oldalról szükséges is, hogy a (9) alatti relácziók, ha s és t értékét (10.)-ből veszszük, identitások legyenek. De ez lehetetlen, ha csak kezdettől fogva nem volt dolgunk identitással. Legyen p. az egyik reláczió

$$F(x, y, z, p, q, s, t) = 0$$

akkor ez összeállítva az $u = a_1$ és $v = a_2$ egyenletekkel, ha először F és u függvénydeterminánsa s és t szerint eltünik egy

$$a_1 = \lambda(x, y, z, p, q)$$

alakú relácziót ád, másodszor pedig, ha az említett függvénydetermináns nem 0, egy

$$a_2 = \mu(x, y, z, p, q, a_1)$$

alakú kapcsolatot eredményez; de ezeknek egyike sem lehet identitás. Így tehát a (10) alatti rendszer valóban csak akkor föltétlenül integrálható, ha a (9) alatti relácziók közvetetlenül identikusok.

Ebben az esetben az integráczió még 3 tetszőleges állandót vezet be, és így az általános megoldás z számára 5 tetszőleges állandót tartalmazó függvényalak lesz:

$$z = F(x, y, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$$

II.

A föltétlenül integrálható rendszer általános megoldásának és a másodrendü parcziális differencziálegyenlet teljes integráljának kapcsolata.

1. *Ha*

$$r + f = 0, \quad u = a_1, \quad v = a_2 \tag{1}$$

(hol úgy mint előbb f, u és v az x, y, z, p, q, s és t függvényei) *föltétlenül integrálható rendszer és*

$$z = F(x, y, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \tag{2}$$

e rendszer általános megoldása, akkor $z = F$ *egyszersmind mindig az*

$$r + f = 0$$

másodrendü parcziális differencziálegyenlet teljes integrálja.

Hogy $z = F$ mindenesetre $r + f = 0$ integrálja világos. Bebizonyítandó csak az, hogy *teljes* integrál. A tetszőleges állandók száma megfelelőleg öt; tehát még csak az lesz kimutatandó, hogy a

$$z = F$$
$$p = F_x, \quad q = F_y$$
$$r = F_{xx}, \quad s = F_{xy}, \quad t = F_{yy}$$

egyenletekből[1] az a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 tetszőleges állandók kiküszöbölése által más, mint az $r + f = 0$ egyenlettel algebrailag aequivalens egyenlet nem származhatik.

Ha ilyen volna, akkor az $r + f = 0$ segítségével belőle r-et eliminálhatjuk, és ezen elimináczió után alakja p. $g(x, y, z, p, q, s, t) = 0$; akkor az

[1] Ezen egyenletekben $F_x = \frac{dF}{dx}$, $F_y = \frac{dF}{dy}$, $F_{xx} = \frac{d^2F}{dx^2}$, $F_{xy} = \frac{d^2F}{dx\,dy}$, $F_{yy} = \frac{d^2F}{dy^2}$

$$\left.\begin{array}{r} r+f=0 \\ g=0 \\ u=a_1 \end{array}\right\} \text{ és } \begin{array}{r} r+f=0 \\ g=0 \\ v=a_2 \end{array}$$

rendszereknek $z = F$ közös megoldása volna; de ez lehetetlen, mert legalább is az egyik rendszer egyenletei algebrailag egymástól függetlenek, és így a legkedvezőbb esetben is, ha t. i. föltétlenül integrálható, a megoldás a-n kivül még csak 3 tetszőleges állandót tartalmazhatna, tehát összesen 4-et, nem pedig mint $z = F$ ötöt.

Hogy a $z = F$ teljes integrálnak megfelelő másodrendű parcziális differencziálegyenlet $r + f = 0$ alakú legyen, szükséges és elegendő, hogy a

$$\begin{array}{cc} & z = F \\ p = F_x, & q = F_y \\ s = F_{xy}, & t = F_{yy} \end{array} \tag{4}$$

egyenletrendszer a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 szerint megoldható legyen; ha e megoldások alakja

$$a_i = \alpha_i$$

akkor a másodrendű parcziális differencziálegyenlet már r szerint megoldva:

$$r = F_{xx}(x, y, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$$

2. Ezek után az $u = a_1$ és $v = a_2$ egyenletek jelentését is könnyü lesz uj világításba helyezni. Ezek ugyanis szintén oly differencziálegyenletek, melyek megoldása $z = F$. Ez nem ellenkezik az előbbi eredményekkel, mert ezen egyenletek nem adnak tiszta relácziót x, y, z, p, q, r, s, t között, hanem még egy tetszőleges állandót is tartalmaznak.

Szükséges lesz áttekinteni az egy tetszőleges állandót tartalmazó differencziálegyenleteket, melyeknek megoldása $z = F$. Minden ily egyenletből az $r + f = 0$ segítségével r eliminálható, és így elég lesz az r-et nem tartalmazó alakokat fölállítani. A tetszőleges állandó, mely az egyenletben bennmarad, mint az $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ tetszőleges függvénye fogható fel. Ha tehát az a-kat a

$$\begin{array}{ccc} z = F, & p = F_x, & q = F_y \\ & s = F_{xy}, & t = F_{yy} \\ & C = \omega(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) & \end{array}$$

rendszerből kiküszöböljük, ily differencziálegyenletet nyerünk, melynek tehát az előbb bevezetett jelzésekkel végleges alakja:

$$\omega\,(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) = C \tag{5}$$

hol ω tetszőleges függvény.

Most még bebizonyíthatjuk, hogy az utoljára nyert egyenlet föladatunknak általános megoldását adja. Legyen ugyanis

$$\Phi\,(x, y, z, p, q, s, t) = C \tag{6}$$

ily differencziálegyenlet, melynek megoldása $z = F$, vagyis melyben Φ a $z = F$ helyettesítés által a tetszőleges állandók függvényévé lesz: Akkor x és y szerint differencziálva:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} p + \frac{\partial \Phi}{\partial p} r + \frac{\partial \Phi}{\partial q} s + \frac{\partial \Phi}{\partial s}\frac{ds}{dx} + \frac{\partial \Phi}{\partial t}\frac{dt}{dx} = o\\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} q + \frac{\partial \Phi}{\partial p} s + \frac{\partial \Phi}{\partial q} t + \frac{\partial \Phi}{\partial s}\frac{ds}{dy} + \frac{\partial \Phi}{\partial t}\frac{dt}{dy} = o\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Itt az s és t differencziálhányadosai, valamint r kifejezhetők x, y, z, p, q, s, t által, ha t. i. a differencziálás után $a_i = \alpha_i$ helyettesíttetik, és kell hogy ezután a két egyenlet identikus legyen, mert különben volna tetszőleges állandót nem tartalmazó differencziálegyenlet, melynek $z = F$ eleget tesz és mely $r + f = 0$-tól különbözik, minthogy r benne elő sem fordul.

Így tehát a Φ függvény szükségkép kielégít két lineáris elsőrendű parcziális differencziálegyenletet 7 független változóval, melyeknek legáltalánosabb közös megoldása egy 5 elemtől függő tetszőleges függvényt tartalmaz. Így tehát

$$\Phi = \omega\,(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$$

valóban az általános megoldás.

3. Vizsgálataink, mint már az eddigiekből is kitünik, ama másodrendű parcziális differencziálegyenletekre vonatkoznak majd, melyek az

$$r + f\,(x, y, z, p, q, s, t) = 0$$

alakra hozhatók. Nem lesz fölösleges mindjárt itt kiemelni, hogy a differencziálegyenlet ily alakja nem szorítja meg a tárgyalás általánosságát. Ha ugyanis r nem fordul elő a differencziálegyenletben, de t igen, akkor elég lesz az x és y független változók elnevezését felcserélni, hogy az egyenlet a kellő alakot nyerje.

Így tehát csak azon differencziálegyenletek maradnak, melyekben a második differencziálhányadosok közül csak s fordul elő, és így általánosságban

$$s = \psi(x, y, z, p, q)$$

alakra hozhatók. Ezen egyenletosztály speciális alkatú, azaz reá nézve az általánosnál egyszerűbb megoldási módszerek alkalmazhatók; de azért a továbbiak miatt kifejtjük ama transformácziót, mely — KOWALEWSKY[1] által tetszőleges parcziális differencziálegyenletre megállapítva — ezt az egyenletet az előbb fölhozott alakba viszi át.

Ezen eljárás uj független változók bevezetéséből áll. Legyen ugyanis:

$$x_1 = kx + ly$$
$$y_1 = mx + ny$$

akkor, ha a

$$p_1 = \frac{dz}{dx_1}, \quad q_1 = \frac{dz}{dy_1}$$

$$r_1 = \frac{d^2z}{dx_1^2}, \quad s_1 = \frac{d^2z}{dx_1\, dy_1}, \quad t_1 = \frac{d^2z}{dy_1^2}$$

jelzéseket használjuk, lesz:

$$\begin{aligned}
p &= kp_1 + mq_1 \\
q &= lp_1 + nq_1 \\
r &= k^2r_1 + 2mks_1 + m^2t_1 \\
s &= klr_1 + (kn + ml)\, s_1 + mnt_1 \\
t &= l^2r_1 + 2nls_1 + n^2t
\end{aligned}$$

hol most már csak a transformácziói állandói úgy választandók, hogy $kn - ml$ ne legyen zerus, valamint kl sem. Legegyszerűbb lesz:

$$k = l = m = 1, \quad n = -1$$

[1] »Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen«, Journal für r. u. a. Math. 80-ik köt. 19. oldal.

Akkor

$$x = \frac{x_1 + y_1}{2}, \quad y = \frac{x_1 - y_1}{2}$$

$$p = p_1 + q_1, \quad q = p_1 - q_1, \quad s = r_1 - t_1$$

és a transformált differencziálegyenlet:

$$r_1 = t_1 + \varphi\left(\frac{x_1 + y_1}{2}, \frac{x_1 - y_1}{2}, z, p_1 + q_1, p_1 - q_1\right)$$

vagyis

$$r_1 = t_1 + \Psi\,(x_1, y_1, z, p_1, q_1)$$

hol Ψ ép úgy tetszőleges függvény, mint előbb φ.

III.

A teljes integrál meghatározására szolgáló elsőrendű simultán rendszer két ismeretlen függvénynyel.

1. Adva lévén az

$$r + f(x, y, z, p, q, s, t) = 0 \tag{1}$$

másodrendű parcziális differencziálegyenlet, teljes integráljának meghatározása ismeretes müveletekre (totál differencziálegyenlet-rendszer integrálására) lesz visszavezetve, ha sikerül az x, y, z, p, q, s, t két oly függvényét, u-t és v-t meghatározni, hogy u, v függvénydeterminánsa s és t szerint el ne tünjék és

$$u = a_1, \qquad v = a_2$$

(1)-gyel együtt feltétlenül integrálható rendszert alkosson.

Erre szükséges, hogy u és v az I. szak. (9) alatt kifejtett reláczióknak eleget tegyen, melyek, ha a determinánsokat kifejtjük:

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{dv}{dx}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial t}\right)\left(\frac{dv}{dy}\right) - \\ - \left(\left(\frac{df}{dy}\right)\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial t}\left(\frac{du}{dy}\right)\right)\frac{\partial v}{\partial s} + \\ + \left(\left(\frac{df}{dy}\right)\frac{\partial u}{\partial s} - \frac{\partial f}{\partial s}\left(\frac{du}{dy}\right) - \left(\frac{du}{dx}\right)\right)\frac{\partial v}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial s}\left(\frac{dv}{dx}\right) + \frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{dv}{dy}\right) - \left(\frac{du}{dx}\right)\frac{\partial v}{\partial s} - \left(\frac{du}{dy}\right)\frac{\partial v}{\partial t} = 0\end{gathered} \tag{2}$$

hol a $\left(\frac{d}{dx}\right)$ és $\left(\frac{d}{dy}\right)$ jelzések csak rövidítések az I. szakaszban (6) alatt megállapított értelemben.

Ez nem egyéb, mint *két simultán elsőrendü parcziális differencziálegyenlet* az u és v függvényekre nézve, melyek e függvényekre nézve külön-külön lineárisak és melyekben x, y, z, p, q, s, t független változóknak tekintendők.

E differencziálegyenlet rendszer minden partikuláris megoldása, ha csak a függvénydeterminánsra vonatkozó mellékföltételnek eleget tesz, e szerint az (1) alatt adott másodrendű parcziális differencziálegyenletnek egy teljes integrálját szolgáltatja.

A mi a függvénydeterminánsra vonatkozó mellékföltételt illeti, ezt úgy fejezhetjük ki egyszerűen, hogy *azon u, v függvények közül, melyek a (2) rendszernek eleget tesznek, kizárandók, mint problemánk megoldására alkalmatlanok, azok, melyek még a*

$$D \equiv \frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial s} = 0 \quad (3)$$

egyenletnek is eleget tesznek.

Amaz eset ugyanis, melyben $u = a_1$, $v = a_2$ többszörös gyökrendszerrel bír és D csak az $u = a_1$, $v = a_2$ rendszerből vett s és t értékek behelyettesítés által lesz o, nem is fordulhat elő. Ekkor ugyanis a

$$D\,(x, y, z, p, q, s, t) = 0$$
$$u = a_1, \quad v = a_2$$

egyenleteknek közös gyökrendszer felelne meg; de akkor szóról szóra ismételhetjük az I. szakasz végén vont következtetéseket, melyek mutatták, hogy ekkor az a_1 és a_2 nem lehetnének egymástól független tetszőleges állandók.

Közvetetlenül látni, hogy ha u bármi függvény és v az u-nak tetszőleges függvénye, a (2) egyenletek ki lesznek elégítve, de az így minden számítás nélkül nyert megoldás a (3) által kizártak sorába tartozik.

2. Föladatunk most már: *Meghatározni mindamaz u és v függvényeket, melyek a (2) rendszert kielégítik, de nem felelnek meg mindannyian a (3)-nak.*

Az x, y, z, p, q, s és t összes függvényei a (2) rendszerre vonatkozólag 3 osztályba sorozhatók. A mint t. i. *u helyébe téve.*

A) *A (2) alatti rendszer két egyenlete egy egyetlen egyenlettel aequivalens; a mi megtörténhetik, ha 1. a két egyenlet algebrailag egymásból következik, vagyis a v parcziális diffe-*

rencziálhányadosainak együtthatói a két egyenletben egymással arányosak és 2. ha az egyik egyenletből identitás lesz, azaz együtthatói mindannyian eltünnek.

B) *A két egyenlet a v ismeretlen függvényre nézve az elsőrendű és lineáris parcziális differencziálegyenletek oly rendszere, mely az integrabilitási föltételt identice kielégíti, azaz ú. n. teljes rendszer.*

C) *A két egyenlet nem teljes rendszer, vagyis az integrabilitási föltételek kifejtése még legalább egy harmadik, a két előbbitől algebrailag független differencziálegyenletet ad a v meghatározására.*

Mindenekelőtt kimutatjuk, hogy *a C) osztályba tartozó függvények nem adnak problémánk megfejtésére alkalmas u függvényt.* Ha ugyanis az ellenkezőt teszszük föl, akkor az

$$r + f = 0, \qquad u = a_1$$

differencziálegyenleteknek van egy

$$z = F(x, y, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$$

alakú közös megoldásuk, mely az $r + f = 0$ egyenletnek teljes integrálja. (A II. szakaszban bevezetett jelzéseket használjuk.) Akkor u nem más, mint az id. helyen bevezetett α_1 függvény. De így a (2) rendszerben u helyébe α_1-et téve, v-nek következő értékei a rendszernek mindenesetre megfelelnek:

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$$

mert tudjuk, hogy p. az

$$r + f = 0, \qquad \alpha_1 = a_1, \alpha_2 = a_2$$

rendszernek közös integrálja $z = F$; és ez elég, ha α_1 és α_2 függvénydeterminánsa s és t szerint nem tünik el.

Ha e függvénydetermináns 0, akkor azt, hogy α_1, és α_2 rendszerünk megoldása, következőképen bizonyíthatjuk: E függvények mindenesetre kielégítik a II. szak. (7) alatti egyenleteit, melyek röviden irva:

$$\left(\frac{d\alpha_1}{dx}\right) + \frac{\partial \alpha_1}{\partial s}\frac{ds}{dx} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial t}\frac{dt}{dx} = 0, \quad \left(\frac{d\alpha_1}{dy}\right) + \frac{\partial \alpha_1}{\partial s}\frac{ds}{dx} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial s}\frac{ds}{dy} = 0$$

$$\left(\frac{d\alpha_2}{dx}\right) + \frac{\partial \alpha_2}{\partial s}\frac{ds}{dx} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial t}\frac{dt}{dx} = 0, \quad \left(\frac{d\alpha_2}{dy}\right) + \frac{\partial \alpha_2}{\partial s}\frac{ds}{dx} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial s}\frac{ds}{dy} = 0$$

Ezek identitások lesznek, ha az előbb kifejtett módon az

$$r, \quad \frac{ds}{dx}, \quad \frac{ds}{dy}, \quad \frac{dt}{dx}, \quad \frac{dt}{dy}$$

alakokat

$$z, \; p, \; q, \; s, \; t$$

által kifejezzük.

Föltéve most már, hogy

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial s}\,\frac{\partial \alpha_2}{\partial t} - \frac{\partial \alpha_2}{\partial s}\,\frac{\partial \alpha_1}{\partial t} = 0$$

kell, miután az egyenletek együtt fönnállanak, hogy legyen

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial s}\left(\frac{d\alpha_2}{dx}\right) - \frac{\partial \alpha_2}{\partial s}\left(\frac{d\alpha_1}{dx}\right) = 0$$

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial t}\left(\frac{d\alpha_2}{dx}\right) - \frac{\partial \alpha_2}{\partial t}\left(\frac{d\alpha_1}{dx}\right) = 0$$

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial s}\left(\frac{d\alpha_2}{dy}\right) - \frac{\partial \alpha_2}{\partial s}\left(\frac{d\alpha_1}{dy}\right) = 0$$

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial t}\left(\frac{d\alpha_2}{dy}\right) - \frac{\partial \alpha_2}{\partial t}\left(\frac{d\alpha_1}{dy}\right) = 0$$

és ezen utoljára fölirt öt reláczió mutatja, hogy α_1 és α_2 ekkor is kielégíti a (2) alatti rendszert.

Ha tehát $u \equiv \alpha_1 = a_1$ oly differencziálegyenlet, melynek megoldása $z = F$, akkor a (2) alatti rendszernek, ha u helyébe α_1-et teszünk, megfelel a

$$v = \omega\,(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$$

megoldás, hol $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ egymástól független megoldások, azaz egy α sem fejezhető ki a többi által x, y, z, p, q közbelépése nélkül. Az ily

$$\varphi\,(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) = 0$$

relációból ugyanis következnék, hogy

$$\varphi\,(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = 0$$

azaz kapcsolat volna a függetleneknek föltételezett állandók közt, a mi nem lehetséges.

Így tehát u helyébe α_1-et téve, a (2) rendszerben a v-nek egy 5 elemtől függő tetszőleges függvény felel meg, és ez a C) esetben lehetetlen; mert ekkor egy legalább 3 egymástól algebrailag független egyenletből álló rendszerünk volna a 7 független változót tartalmazó v meghatározására; ennek legáltalánosabb megoldása pedig egy legfölebb 4 elemtől függő tetszőleges függvényt adhatna.

A C) eset e kizárása után most már részletesen foglalkozunk azon u-k meghatározásával, melyek az A) és B) eseteket szolgáltatják, és melyek a mint az eddigiekből is világos, az $r+f=0$ differencziálegyenletnek minden teljes integrálját fogják megadni.

Megjegyezzük még, hogy az A) és B) esetek nem egyenértékűek, hanem az első a másodiknak csak úgy szólván singuláris alfaja, határesete, mely nem fordul elő minden másodrendű differencziálegyenletnél, de, ha előfordul, ennek egy bizonyos speczialis alkatát jelzi. Különben a B) eset tárgyalásánál az A) alá tartozó u-k mint ily speczialis megoldások ujból felmerülnek.

IV.

A teljes integrál meghatározásában fölmerülő speczialis *A)* eset részletes tárgyalása.

1. Hogy a megelőző szakaszban (2) alatt álló rendszer a v-re nézve két algebrailag aequivalens differencziálegyenletből álljon, kell, hogy a v parcziális differencziálhányadosainak együtthatói e két egyenletben arányosak legyenek. *Az u számára tehát a következő elsőrendű differencziálegyenlet rendszert nyerjük:*

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial t}}{\frac{\partial u}{\partial s}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial s}}{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)}$$

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial t}}{\frac{\partial u}{\partial s}} = \frac{\left(\frac{df}{dy}\right)\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial t}\left(\frac{du}{dy}\right)}{\left(\frac{du}{dx}\right)}$$

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial t}}{\frac{\partial u}{\partial s}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial s}\left(\frac{du}{dy}\right) - \left(\frac{df}{dy}\right)\frac{\partial u}{\partial s} - \left(\frac{du}{dx}\right)}{\left(\frac{du}{dy}\right)}$$

hol még megjegyzendő, hogy ebben az esetben $\frac{\partial u}{\partial s}$ nem lehet 0, mert különben $\frac{\partial u}{\partial t}$ is 0 volna és ekkor u nem tartalmazná sem s-et, sem t-t, tehát a kizárandó megoldások közé tartozněk.

Az első egyenlet most már könnyen így is irható:

$$\left(-\frac{\frac{\partial u}{\partial t}}{\frac{\partial u}{\partial s}}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial s}\left(-\frac{\frac{\partial u}{\partial t}}{\frac{\partial u}{\partial s}}\right) + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

azaz, ha a

$$\mu^2 + \frac{\partial f}{\partial s}\mu + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \tag{1}$$

két megoldását μ_1 és μ_2-vel jelöljük, (hol μ_1 és μ_2 az x, y, z, p, q, s, t ismeretes függvényei), az első egyenlet helyébe lép

$$\frac{\partial u}{\partial s}\mu_1 + \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \text{ vagy } \frac{\partial u}{\partial s}\mu_2 + \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \tag{2}$$

a mi által (ép úgy, mint a MONGE-AMPÈRE-féle módszernél) a tárgyalandó másodfokú rendszert két elsőfokú rendszerre bontjuk szét.

Ha t. i. a többi egyenletbe a baloldalon álló hányados értékét, — μ_i - t ($i = 1, 2$) bevezetjük, ezen egyenletek lesznek:

$$\mu_i\left(\frac{du}{dx}\right) - \frac{\partial f}{\partial t}\left(\frac{du}{dy}\right) + \left(\frac{df}{dy}\right)\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

$$\left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\mu_i + \frac{\partial f}{\partial s}\right)\left(\frac{du}{dy}\right) - \left(\frac{df}{dy}\right)\frac{\partial u}{\partial s} = 0$$

de ezen egyenletek egymással aequivalensek, mert ha a másodikat μ_i - vel szorozzuk, akkor az első reláczió értelmében

$$\mu_i^2 + \frac{\partial f}{\partial s}\mu_i = -\frac{\partial f}{\partial t}, \quad -\mu_i\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

A $\mu = 0$ esete kizárható egészen, mert ekkor kell, hogy $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ legyen és $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, de ekkor $\frac{\partial u}{\partial s}$ szintén eltünik, és így ebben az esetben rendszerünk nem adhat alkalmas függvényt. Hogy a $\mu = 0$ miképen ad mégis idetartozó megoldást, azt majd e szakasz utolsó pontjában látjuk.

Így tehát az ide tartozó u-k meghatározására a következő két elsőfokú rendszert nyerjük:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial s}\mu + \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \\ &\left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\mu + \frac{\partial f}{\partial s}\right)\left(\frac{du}{dy}\right) - \left(\frac{df}{dy}\right)\frac{\partial u}{\partial s} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

hol μ az $r+f=0$ differencziálegyenlet charakteristikus egyenletének[1] egyik gyöke:

$$\mu = \frac{-\frac{\partial f}{\partial s} \pm \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)^2 - 4\frac{\partial f}{\partial t}}}{2}$$

A μ két értéke szerint e két rendszert röviden, mint S_1 és S_2-t idézzük.

Általánosságban ama föltétel, hogy a (3) alatti S_1 vagy S_2 rendszerek egyike megoldható legyen, kiválasztja a másodrendű és két független változót tartalmazó parcziális differencziálegyenletek egy bizonyos osztályát. E föltétel ki lévén elégítve, az illető differencziálegyenletnek (nemcsak egy, hanem mint majd később látjuk, végtelen sok) első integrálját meg lehet határozni. Mert, *ha u az S_1 vagy S_2 megoldása, v egyszerűen* [3. szak. (2)] *a*

$$\frac{\partial u}{\partial s}\left(\frac{dv}{dx}\right) + \frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{dv}{dy}\right) - \left(\frac{du}{dx}\right)\frac{\partial v}{\partial s} - \left(\frac{du}{dy}\right)\frac{\partial v}{\partial t} = 0 \quad (4)$$

differencziálegyenletből számítandó ki úgy, hogy a

$$\frac{\partial u}{\partial t}\,\frac{\partial v}{\partial s} - \frac{\partial u}{\partial s}\,\frac{\partial v}{\partial t} = 0 \quad (5)$$

egyenletnek ne tegyen eleget. Ekkor

$$r+f=0, \quad u=a_1, \quad v=a_2$$

föltétlenül integrálható rendszer lesz, és így az $r+f=0$ teljes integrálját adja.

Ez pedig mindig lehetséges; e két egyenlet (4) és (5) nem lehet algebrailag aequivalens, és így a kettő közös megoldásai legfölebb 5 elemtől függő tetszőleges függvény által lesznek adva:

$$v = \varphi(\gamma_1, \ldots, \gamma_i), \quad i \leqq 5$$

[1] A DARBOUX által bevezetett elnevezés szerint

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r}\mu^2 + \frac{\partial \Phi}{\partial s}\mu + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = o$$

a $\Phi(x, y, z, p, q, r, s, t) = o$ differencziálegyenlethez tartozó *charakteristikus egyenlet.*

hol $\gamma_1, \ldots, \gamma_i$ egymástól független függvények, azaz egyikük sem fejezhető ki, mint a többiek függvénye. Akkor a (4) általános megoldása, minthogy benne 7 független változó foglaltatik (x, y, z, p, q, s, t) és $\gamma_1, \ldots, \gamma_i$ kielégítik

$$v = \psi\,(\gamma_1, \ldots, \gamma_i, \gamma_{i+1}, \ldots, \gamma_6)$$

alakban irható, hol ψ ismét tetszőleges függvény és $\gamma_1, \ldots, \gamma_6$ független függvények. Még pedig látni, hogy ha ψ csak egyikét is tartalmazza a $\gamma_{i+1}, \ldots, \gamma_6$ függvényeknek, nem tehet eleget az (5.)-nek, mert ekkor az illető ψ-re nézve

$$\psi\,(\gamma_1, \ldots, \gamma_i, \gamma_k, \ldots) = f\,(\gamma_1, \ldots, \gamma_i)$$

volna, azaz γ_k-t ki lehetne fejezni a többi γ által.

Így tehát a (4) által meghatározott függvények sokaságából (6 elemtől függő tetszőleges függvény) a függvénydeterminánsra vonatkozó feltétel által a függvények egy alsóbbrendű sokasága (legfölebb 5 elemtől függő tetszőleges függvény) lesz kizárva.

2. A (4) alatti differencziálegyenlet megoldásai kapcsolatban állanak az S_1 és S_2 rendszerek integráljaival. Ha t. i. *u a (4.)-ben az S_1 rendszer megoldása, akkor az S_2 rendszer minden integrálja u_2 eleget tesz a (4.)-nek is,* azaz a

$$V_1 \equiv \frac{\partial u_1}{\partial s}\left(\frac{dv}{dx}\right) + \frac{\partial u_1}{\partial t}\left(\frac{dv}{dy}\right) - \left(\frac{du_1}{dx}\right)\frac{\partial v}{\partial s} - \left(\frac{du_1}{dy}\right)\frac{\partial v}{\partial t} = 0 \tag{6}$$

differencziálegyenletnek eleget tesz a

$$\frac{\partial v}{\partial s}\,\mu_2 + \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \tag{7}$$

$$\left(\frac{dv}{dx}\right) + \left(\mu_2 + \frac{\partial f}{\partial s}\right)\left(\frac{dv}{dy}\right) - \left(\frac{df}{dy}\right)\frac{\partial v}{\partial s} = 0$$

rendszer minden megoldása, ha u_1 maga a

$$\frac{\partial u_1}{\partial s}\,\mu_1 + \frac{\partial u_1}{\partial t} = 0 \tag{8}$$

$$\left(\frac{du_1}{dx}\right) + \left(\mu_1 + \frac{\partial f}{\partial s}\right)\left(\frac{du_1}{dy}\right) - \left(\frac{df}{dy}\right)\frac{\partial u_1}{\partial s} = 0$$

megoldása.

Behelyettesítve ugyanis a (7.) egyenletek elsejéből a $\frac{\partial v}{\partial t}$ értékét, lesz (6).

$$\frac{\partial u_1}{\partial s}\left(\frac{dv}{dx}\right)+\frac{\partial u_1}{\partial t}\left(\frac{dv}{dy}\right)-\left[\left(\frac{du_1}{dx}\right)-\mu_2\left(\frac{du_1}{dy}\right)\right]\frac{\partial v}{\partial s}=0$$

mely ha u_1 a (8) megoldása, nem más, mint a második (7) alatti egyenlet, ha azt $\frac{\partial u_1}{\partial s}$ - sel szorozzuk, mert

$$\frac{\partial f}{\partial s}=-(\mu_1+\mu_2)$$

és így

$$(\mu_2+\frac{\partial f}{\partial s})\frac{\partial u_1}{\partial s}=-\mu_1\frac{\partial u_1}{\partial s}=\frac{\partial u_1}{\partial t}$$

továbbá pedig a (8) egyenletek másodika szerint

$$\left(\frac{df}{dy}\right)\frac{\partial u_1}{\partial s}=\left(\frac{du_1}{dx}\right)+\left(\mu_1+\frac{\partial f}{\partial s}\right)\left(\frac{du_1}{dy}\right)=\left(\frac{du_1}{dx}\right)-\mu_2\left(\frac{du_1}{dy}\right)$$

Az S_2 rendszer megoldásai azonban soha sem merítik ki a (4.) vagy (6.) differencziálegyenlet megoldásait, mert ezek egy hat, amazok pedig egy legfölebb öt elemtől függő tetszőleges függvény sokaságát alkotják.

Ellenben az S_2 minden megoldása eleget tesz a függvénydeterminánsra vonatkozó föltételnek, mert u_1 és u_2 függvénydeterminánsa:

$$\frac{\partial u_1}{\partial s}\frac{\partial u_2}{\partial t}-\frac{\partial u_1}{\partial t}\frac{\partial u_2}{\partial s}=\frac{\partial u_1}{\partial s}\frac{\partial u_2}{\partial s}(\mu_2-\mu_1)$$

csak abban a kivételes esetben tünhetik el, ha a charakteristikus egyenlet két gyöke μ_1 és μ_2 egyenlő, a mikor S_1 és S_2 is összeesik. Ez még akkor is helyes, ha az egyik μ és így $\frac{\partial u}{\partial t}$ is egyenlő zerussal.

A $\frac{\partial u_1}{\partial s}$ vagy $\frac{\partial u_2}{\partial s}$ eltünése az e szakasz elején tett megjegyzés szerint ki van zárva.

Fontos még a következő, ugyanezen integrálok kapcsolatára vonatkozó tétel. *Ha az S_1 teljes rendszer, ennek mindig van oly integrálja, mely nem elégíti ki a (6) alatti V_1 egyenletet, ha csak az S_1 és S_2 rendszerek nem esnek össze, azaz $\mu_1 = \mu_2$.*

Ekkor ugyanis a (7) helyébe jön az u_i differencziálegyenlet rendszere:

$$\begin{gathered} \frac{\partial v}{\partial s}\mu_1 + \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \\ \left(\frac{dv}{dx}\right) + \left(\mu_1 + \frac{\partial f}{\partial s}\right)\left(\frac{dv}{dy}\right) - \left(\frac{df}{dy}\right)\frac{\partial v}{\partial s} = 0 \end{gathered} \tag{9}$$

Ép úgy járva el mint előbb, lesz a (6.)-ból:

$$\frac{\partial u_1}{\partial s}\left(\frac{dv}{dx}\right) + \frac{\partial u_1}{\partial t}\left(\frac{dv}{dy}\right) - \left[\left(\frac{du_1}{dx}\right) - \mu_1\left(\frac{du_1}{dy}\right)\right]\frac{\partial v}{\partial s} = 0$$

melylyel a (9) alatt álló második egyenlet csak akkor lehet identikus, ha

$$\frac{\partial u_1}{\partial s}\left(\frac{df}{dy}\right) = \left(\frac{du_1}{dx}\right) - \mu_1\left(\frac{du_1}{dy}\right)$$

de

$$\frac{\partial u_1}{\partial s}\left(\frac{df}{dy}\right) = \left(\frac{du_1}{dx}\right) + \left(\mu_1 + \frac{\partial f}{\partial s}\right)\left(\frac{du_1}{dy}\right)$$

és így kellene, hogy

$$\mu_1 = -\left(\mu_1 + \frac{\partial f}{\partial s}\right) = \mu_2$$

legyen.

3. *A v meghatározására akkor is csak egy differencziálegyenletünk lesz, ha az u függvény olyan, hogy a III. szakaszban (2) alatt felirt differencziálegyenletek egyikében minden együttható eltünik.*

Minthogy az oly u függvényok, melyek sem s-et sem t-t nem tartalmazzák, kezdettől fogva ki vannak zárva, az idézett egyenletek másodika nem eshetik el soha; erre ugyanis szükséges volna, hogy $\frac{\partial u}{\partial s}$ és $\frac{\partial u}{\partial t}$ zérus legyen, tehát hogy u ne tartalmazza sem s-et sem t-t.

Hogy az első egyenlet minden együtthatója eltünjék, kell először is, hogy legyen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

Ekkor a $\frac{\partial v}{\partial y}$ együtthatója lesz: $-\frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial t}$ Mint-hogy pedig $\frac{\partial u}{\partial s}$ nem lehet zerus, kell ismét, hogy legyen:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

azaz ez az eset csak akkor fordulhat elő, ha az adott differencziálegyenlet charakteristikus egyenletének egyik gyöke 0. A $\frac{\partial v}{\partial s}$ együtthatója ezek után magától elesik, és így végre az utolsó feltétel a $\frac{\partial v}{\partial t}$ együtthatójának eltünése:

$$\left(\frac{df}{dy}\right)\frac{\partial u}{\partial s} - \frac{\partial f}{\partial s}\left(\frac{du}{dy}\right) - \left(\frac{du}{dx}\right) = 0$$

A mint látni, a nyert feltételek egyszerűen az előbb kizárt $\mu = o$ esetre vezetnek vissza, a mely esetben az S rendszer a most nyert meghatározást adja az u számára.

A nyert eredményeket tehát a következő tételben vonhatjuk össze:

Ha u az S_1 vagy S_2 elsőrendü differencziálegyenlet-rendszer megoldása, ha továbbá v a

$$\frac{\partial u}{\partial s}\left(\frac{dv}{dx}\right) + \frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{dv}{dy}\right) - \left(\frac{du}{dx}\right)\frac{\partial v}{\partial s} - \left(\frac{du}{dy}\right)\frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

differencziálegyenlet megoldása, az

$$r + f = 0, \quad u = a_1, \quad v = a_2$$

föltétlenül integrálható rendszer és az első differencziálegyenlet teljes integrálját adja, ha csak u és v függvénydeterminánsa s és t szerint nem 0.

Föladatunk lesz most már részletesen megvizsgálni, hogy a kifejtett módszerek által nyerhető integráljai az adott $r+f=0$ differencziálegyenletnek mennyire általánosak. Ezt a következő szakaszban teszszük. Már most is világos, hogy, mihelyt S_1 vagy S_2 integrálható, *végtelen sok teljes integrált* nyerünk. [1]

[1] E hely legalkalmasabb lesz arra, hogy a jelen értekezés kapcsolatát az eddig ismert eredményekkel néhány szóval jelezzem, minthogy ezek épen tárgyalásunk idáig kifejtett részére vonatkoznak. Mindössze két dolgozat lesz erre vonatkozólag idézendő :

G. Darboux, Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre. (Annales de l'école normale supérieure T. VII. 1870, p. 163—173.)

Hamburger, Zur Theorie der Integration eines Systems von n nicht linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit 2 unabhängigen und n abhängigen Variablen. (Journal für die reine und angew. Mathematik, Bd. 93. 1882.) Második részében p. 201—214.

Darboux figyelmeztetett először arra, hogy az adott másodrendű parcziális differencziálegyenlet bizonyos speciális alkatánál lehetséges oly k-adrendű differencziálegyenletet fölállítani, melynek az adottal nem mint általánosságban legfölebb tetszőleges állandókat, hanem egy tetszőleges függvényt tartalmazó közös megoldása van. Hamburger-nél a Darboux által bebizonyítás nélkül közlött tételek mint egy n-edrendű, de speciális integrabilitási föltételeknek megfelelő differencziálegyenlet elméletének speciális esetei jelentkeznek. Itt találni a mienkkel lényegben megegyező alakban az S rendszereket is. Ezek azonban itt egész más meggondolásokból keletkeznek, és így Hamburger nem ismerte föl e rendszerek jelentőségét a másodrendű parcziális differencziálegyenletek általános elméletében. Ennek következtében ő — ép úgy, mint előtte Darboux — az S rendszerek integrabilitásának esetében meghatározható integrálok körét sokkal szűkebbnek találja, mint a minő ez valóban. Szerinte arra, hogy az $r+f=0$ egyenlet egy teljes integrálját meghatározhassuk, az S_1 és S_2 rendszerek *mindegyikének* kell egy integrállal birnia ; hogy pedig általános integrálját nyerjük, kell hogy mindegyik rendszernek két egymástól független integrálja legyen. Ellenben a mi vizsgálataink szerint elég, ha csak *egy* az S rendszerek közül integrálható, és — mint a legközelebbi szakaszban részletesen kifejtjük — ekkor, ha e rendszernek csak egy integrálja van, már egy tetszőleges függvényt tartalmazó integrált, azaz végtelen sok teljes integrált lehet meghatározni ; ha pedig az egyik S-nek két egymástól független integrálja van, a másodrendű differencziálegyenletnek általános integrálját nyerjük.

V.

A IV. szakaszban kifejtett módszerek által nyerhető integrálok.

1. Az adott másodrendű differencziálegyenletnek

$$r + f = 0$$

egy-egy megoldását ismeretes módon kiválasztjuk a megfelelő függvények sokaságából, ha megadjuk a z és p különben szabadon választható *kezdőértékeit*, melyekbe t. i. átmenjenek, ha x helyébe a szintén általánosságban szabadon választható x_0 állandó értéket teszszük. Ha

$$(z)_{x=x_0} = \zeta(y), \quad (p)_{x=x_0} = \pi(y),$$

akkor még látni, hogy

$$(q)_{x=x_0} = \zeta'(y), \quad (s)_{x=x_0} = \pi'(y)$$
$$(t)_{x=x_0} = \zeta''(y)$$

ha a vonások által y szerinti differencziálást jelölünk. Ha a ζ és π függvények még tetszőleges állandókat tartalmaznak, általánosabb megoldásokat nyerünk, jelesen 5 állandó esetében általánosságban teljes integrált.

Ha az

$$\begin{aligned} r + f &= 0 \\ u(x, y, z, p, q, s, t) &= a_1 \\ v(x, y, z, p, q, s, t) &= a_2 \end{aligned} \tag{1}$$

föltétlenül integrálható rendszert alkotnak, és így differencziálegyenletünk egy teljes integrálját adják, e teljes integrál kezdőértékei könnyen meghatározhatók, ha a két utolsó egyenletben x helyébe x_0-t teszünk. Lesz ekkor

$$\begin{aligned} u(x_0, y, \zeta, \pi, \zeta', \pi', \zeta'') &= a_1 \\ v(x_0, y, \zeta, \pi, \zeta', \pi', \zeta'') &= a_2 \end{aligned} \tag{2}$$

mely nem más, mint *közönséges* simultán differencziálegyenletrendszer, melyből ζ és π mint az y függvényei lesznek meghatározva; még pedig miután π-re nézve első-, ζ-ra nézve másodrendű, 3 uj tetszőleges állandóval, azaz a keresett kezdőértékek

$$\zeta = \zeta\,(y, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5),$$
$$\pi = \pi\,(y, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5).$$

Kivételes eset nem fordulhat elő e rendszer tárgyalásánál, mert u és v függvénydeterminánsa s és t szerint nem tünik el, tehát u_0 és v_0-é ζ' és π' szerint sem tünhetik el az x_0 *minden* értékénél. Az x_0 állandónak csak azon néhány értéke kizárandó, melyre nézve ez megtörténhetik.

Megfordítva két ily relánczió mint a (2.) alattiak, meghatározza az $r + f = o$ egy teljes integrálját és ezzel együtt az (1.) alatti föltétlenül integrálható rendszerét is.

2. *Legyen most már az adott differencziálegyenlethez tartozó S_1 rendszernek egy megoldása, mely legalább s-et vagy t-t tartalmazza* u_1, akkor az

$$r + f = o, \; u_1 = a_1$$

általánosságban [1] föltétlenül integrálható rendszert alkot minden

$$\varphi\,(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6) = a_2$$

alakú egyenlettel, hol φ tetszőleges függvény, $\gamma_1 \equiv u_1$, a γ-k, x, y, z, p, q, s, t bizonyos meghatározott függvényei, melyek közt a változóktól független reláczió nem létezik. Föltehetjük még, hogy $\gamma_1, \ldots, \gamma_5$ identikus a II. szakasz 1-ső pontjának végén jellemzett $\alpha_1, \ldots, \alpha_5$-tel, úgy hogy, ha a φ függvényben γ_6 nem fordul elő, mindig ugyanazt a $z = F$ teljes integrált nyerjük.

Ekkor *a ζ és π meghatározására szolgáló differencziálegyenletek közül a másodikat szabadon választhatjuk, az az φ oly alakját határozhatjuk meg, hogy ha $x = x_0$*

$$[\varphi\,(\gamma_1 \cdots \gamma_6)]_{x = x_0} \equiv v_0$$

legyen. A

$$\gamma_i = a_i, (i = 1, 2, 3, 4. 5)$$

egyenletek ugyanis megoldhatók z, p, q, s, t szerint, megoldásuk az id. helyen használt jelzés értelmében

[1] Ha t. i. u_1 és φ függvénydeterminánsa s és t szerint el nem tünik.

$$\left.\begin{aligned}
z &= F\ \ (x, y, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5)\\
p &= F_x\ (x, y, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5)\\
q &= F_y\ (x, y, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5)\\
s &= F_{xy}\ (x, y, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5)\\
t &= F_{yy}\ (x, y, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5)
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Ha az így nyert értékeket a

$$\gamma_6 = \gamma_6 (x. y, z, p, q, s, t)$$

egyenletbe behelyettesítjük, x és y nem eshetik ki a γ_6 kifejezéséből, mert különben az utolsó egyenlet relácziót adna a γ-k közt, mely nem létezhetik; de y egymagában véve sem eshetik ki, mert különben x a γ-k függvénye volna és így $v = x$ az alapúl szolgáló rendszernek (12.) alatt a III. szakaszban) megoldása volna, a miből

$$\frac{\partial u}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial u}{d t} = 0$$

következnék, a mi kezdettől fogva ki van zárva.

E szerint az utoljára fölirt reláczióból

$$y = \Gamma\,(x, y_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6) \tag{4}$$

következik.

Ha most már a (3.) és (4.)-ben x helyébe x_0-ot teszünk, a

$$\zeta, \zeta' \zeta'', '\pi, \pi', y$$

kifejezését nyerjük

$$\gamma_1^0, \gamma_2^0, \gamma_3^0, \gamma_4^0, \gamma_5^0, \gamma_6^0$$

által, ha $\gamma_i{}^0$ a γ_i megfelelő kezdőértékét jelenti, és ez által a

$$v_0\,(x_0, y, \zeta, \pi, \zeta', \pi', \zeta'') = a_2$$

átmegy

$$\varphi\,(\gamma_1^0, \gamma_2^0, \gamma_3^0, \gamma_4^0, \gamma_5^0, \gamma_6^0) = a_2$$

alakba. Ha tehát a φ-t ily módon választjuk, valóban a ζ és π meghatározására szolgáló differencziálegyenletek egyike a tetszőlegesen választott $v_0 = a_2$ lesz.

3. Ki kell mutatnunk, hogy *módszereink valóban megadnak minden partikuláris integrált, melynek kezdőértékei ζ és π eleget tesznek az $u_0 = Const.$ relácziónak.* E bebizonyitás valamivel

hosszadalmasabb lesz az által, hogy a (2.) differencziálegyenlet-rendszernek nemcsak azon integráljait kell tekintetbe venni, melyek az általánosból az állandók speciálizálása által keletkeznek, hanem a *singuláris integrálokat is.* Alupúl szolgál ekkor a következő tétel:

Ha $r + f = o$, $u = a_1$, $v = a_2$ föltétlenül integrálható rendszert alkotnak, akkor az $r + f = 0$ differencziálegyenlet minden oly integrálja, melyneh kezdőértékei ζ és π eleget tesznek az $u_0 = a_1$, $v_0 = a_2$ differencziálegyenleteknek, egyszersmind kielégiti az $u = a_1$ és $v = a_2$ egyenleteket is, tehát a rendszer integrálja.

Ha ugyanis a rendszert r, s, t szerint megoldott alakjában irjuk:

$$r = R,\ s = S,\ t = T,$$

megoldása aequivalens a

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dx} &= R, & \frac{dp}{dy} &= S, \\ \frac{dq}{dx} &= S, & \frac{dq}{dy} &= T, \\ \frac{dr}{dx} &= p, & \frac{dz}{dy} &= q, \end{aligned} \tag{5}$$

közönséges differencziálegyenlet-rendszerével, mely akkor szintén föltétlenül integrálható és melynek egy bizonyos integrálját nyerjük, ha z, p, q kezdőértékeit ζ, π, ζ' (ha t. i. $x = x_0$) ugy lettek megállapítva, hogy a

$$\frac{d\pi}{dy} = (S)_{x = x_0}$$

$$\frac{d\zeta'}{dy} = (T)_{x = x_0}$$

$$\frac{d\zeta}{dy} = \zeta'$$

egyenleteknek eleget tegyenek.[1] Közvetlenül világos, hogy e differencziálegyenlet-rendszer ζ, π, ζ' számára azonos az $u_0 = a_1$, $v_0 = a_2$ egyenletekkel. Az ilyképen megállapitott z, p, q értékek eleget tesznek az (5.) alatti egyenleteknek, azaz a z,

[1] *König Gyula* l. c. p. 19.

eleget tesz az $r + f = 0$ parcziális differencziálegyenletnek, valamint az $u = a_1$, $v = a_2$-nek is. Ezzel a kijelentett tétel be van bizonyitva, mert az $r + f = 0$ egyenletnek csak egy oly integrálja van, melyre nézve a z és p kezdőértékei ζ és π.

Világos, hogy az (5.)-nek ily módon megállapitott megoldása lehet vagy (az általánosban foglalt) partikuláris vagy pedig singuláris megoldás.

E szerint az eljárás, melylyel az $r + f = 0$ minden oly megoldását nyerjük, melyben a ζ és π kezdőértékek eleget tesznek az $u_0 = Const.$ egyenletnek, a következő lesz:

Mindenek előtt meghatározzuk a föltétlenül integrálható rendszer harmadik egyenletét. Erre legegyszerűbben, minthogy u_0 tartalmazza legalább ζ''-t *vagy* π'-t, második relácziónak veszszük a következőket:

$$\pi' - \chi = 0 \text{ vagy } \zeta'' - \chi = 0$$

a mi meghatározza a megelőző pontban φ-vel jelzett függvényt, vagyis a harmadik egyenletet $v = 0$. Akkor pedig nem szükséges más, mint a

$$\frac{dp}{dx} = R, \quad \frac{dq}{dx} = S, \quad \frac{dz}{dx} = p$$

rendszerből azt a megoldást keresni, melynek kezdőértékei π, ζ', ζ. *Az igy nyert z függvény lesz az $r + f = 0$ keresett megoldása.*

4. Ha az S_1 rendszernek megoldása u_1, akkor $\omega(u_1)$, hol ω tetszőleges függvény, szintén megoldása lesz, de világos, hogy $\omega(u_1) = C$ nem adhat ujat, miután az $u_1 = a_1$-gyel aequivalens egyenlet. *Ha az S_1 rendszernek $\omega(u_1)$ legáltalánosabbb megoldása, akkor S_1-ből több megoldást nem is vezethetünk le, és ez csak az imént jelzett integrálok sokaságát adja.*

Ha azonban az S_1 rendszernek két egymástól független integrálja van u_1 és u_2, akkor a most kifejtett módszerek az $r + f = 0$ általános megoldását, az az bárminő kezdőértékek által meghatározott partikuláris integrálját adják.

Ekkor ugyanis $\omega(u_1, u_2)$, hol ω tetszőleges függvény, szintén megoldja a rendszert és a föltétlenül integrálható rendszer második egyenlete gyanánt felvehető:

$$u \equiv \omega(u_1, u_2) = Const.$$

és itt ω ugy választható, hogy $u = a_1$-nek a szabadon választott ζ, π kezdőértékek megfeleljenek. Legyen ugyanis

$$u_1 = \sigma_1 (x, y, z, p, q, s, t)$$
$$u_2 = \sigma_2 (x, y, z, p, q, s, t)$$

akkor $x = x_0$ esetében

$$(u_1)_{x = x_0} = s_1 (y)$$
$$(u_2)_{x = x_0} = s_2 (y)$$

és most már igen egyszerüen választható ω úgy, hogy

$$\omega [s_1 (y), s_2 (y)] = Const.,$$

azaz y-tól független legyen.[1]

Az ω ily meghatározása után a feladat vissza van vezetve az előbbi esetre, minthogy oly megoldást kell keresnünk, melynek kezdőértékei az $u_0 = Const.$ relácziónak eleget tesznek.

Összefoglaljuk az eddigi eredményeket:

Legyen adva az $r + f = 0$ másodrendü párcziális differencziálegyenlet; képezzük a hozzátartozó S_1 és S_2 rendszereket. Ha e rendszerek egyike integrálható és integrálja

$$u = u (x, y, z, p, q, s, t),$$

akkor tisztán elsőrendü differencziálegyenletek, vagy a mi ugyanaz, totál differencziálegyenletek integrácziója által nyerhetni az $r + f = 0$ minden integrálját, melyben a

$$(z)_{x = x_0} = \zeta \quad , \quad (p)_{x = x_0} = \pi$$

kezdőértékek kielégitik az

$$u_0 (y, \zeta, \pi, \zeta', \pi', \zeta'') = Const.$$

relácziót.

Ha pedig az S_1 vagy S_2 rendszerek egyikének két egymástól független integrálja van, szintén totál differencziálegyenletek integrácziójára van visszavezetve a tetszőleges kezdőértékeknek megfelelő, vagyis az általános integrál meghatározása.

[1] Legyen p.

$$s_1(y) = z \text{ és } y = i_1(z);$$

akkor

$$\omega [s_1(y), s_2(y)] = \omega [z, s_2 i_1(z)]$$

és ha rövidebben

$$s_2 [i_1 (z)] = \tau (z),$$

akkor

$$\omega (u_1, u_2) = \tau (u_1) - u_2$$

a feltételnek megfelelőleg lesz választva.

A számitás részletes menete e fejezetben teljesen ki van fejtve.

Magától értetődik, hogy az S_1 vagy S_2 rendszereknek két független integráljából nem az összes teljes integrálokat nyerjük, hanem az összes partikuláris integrálok összefoglalását a teljes integrálok bizonyos végtelen sorozatában. Ama geometriai terminologia, melyet Lie az elsőrendű párcziális differencziálegyenletek elméletében használ, legalkalmasabb e viszonyok jellemzésére.

VI.

A teljes integrál meghatározásánál fölmerülő általános (B) eset részletes tárgyalása.

1. Föladatunk általánosságban az x, y, z, p, q, s, t oly u függvényét meghatározni, hogy az

$$u = a_1$$

másodrendű differencziálegyenletnek eleget tegyen az $r + f = 0$-nak legalább egy teljes integrálja. Láttuk továbbá, hogy ha u az S_1 vagy S_2 elsőrendű differencziálegyenlet rendszer megoldása, akkor integráljai közt az $r + f = 0$ végtelen sok teljes integrálja foglaltatik, mig minden más esetben ezek az $r + f = 0$-nak legfölebb *egy* teljes integrálját szolgáltatják. Most már azon u függvényeket kell megtalálnunk, melyek valóban ily integrált adnak. A megelőzők szerint a direkt út erre az volna, hogy kifejtenők annak föltételét, hogy az u és v meghatározására szolgáló rendszer (III. szak. (2.) alatt), ha v-t tekintjük benne ismeretlen függvénynek, mikor lesz teljes rendszer. Látni való, hogy ez közvetetlenül több föltételi egyenletet szolgáltat u számára, melyek nem mások, mint másodrendű parcziális differencziálegyenletek az x, y, z, p, q, s, t független változókkal. Azonban már ezen egyenletek fölállitása, még inkább pedig a nyert egyenletek algebrai kapcsolatának kimutatása bonyadalmas számitásokat követel, a miért az u számára nyerendő differencziálegyenlet fölállitásánál más utat választunk.

Tárgyalásunk alapja a következő tétel lesz:

Ha az $r + f = 0$ egy teljes integrálja egyszersmind integrálja az $u = a_1$ differencziálegyenletnek is, és u nem megoldása az S_1 vagy S_2 rendszernek, (a mely esetben már előbb teljesen *végeztünk), akkor csak egy ily teljes integrál létezik és ez a teljes rendszer harmadik egyenletének $v = a_2$ fölállitása nélkül totál differencziálegyenlet rendszerből kiszámítható.*

Ha ugyanis az $r + f = 0$ és $u = a_1$ egyenleteket x és y szerint differencziáljuk és a z harmadik differencziálhányadosait következőkép jelöljük:

$$d_1 = \frac{d^3 z}{d x^3} \quad d_2 = \frac{d^3 z}{d x_2 \, d y} \quad d_3 = \frac{d^3 z}{d x \, d y^2} \quad d_4 = \frac{d^3 z}{d y^3}$$

lesz:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{d f}{d x}\right) + d_1 + \frac{\partial f}{\partial s} d_2 + \frac{\partial f}{\partial t} d_3 = 0 \\
&\left(\frac{d f}{d y}\right) + d_2 + \frac{\partial f}{\partial s} d_3 + \frac{\partial f}{\partial t} d_4 = 0 \\
&\left(\frac{d u}{d x}\right) + \frac{\partial u}{\partial s} d_2 + \frac{\partial u}{\partial t} d_3 = 0 \\
&\left(\frac{d u}{d y}\right) + \frac{\partial u}{\partial s} d_3 + \frac{\partial u}{\partial t} d_4 = 0
\end{aligned} \qquad (1)$$

De ha a föltételnek megfelelőleg az $u = a_1$-nek az $r + f = 0$ csak egy teljes integrálja felel meg, akkor a most nyert egyenletrendszer mindig megoldható a d-k szerint Vezessük be ugyanis a következő jelzéseket:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1, & \dfrac{\partial f}{\partial s}, & \dfrac{\partial f}{\partial s} \\ \dfrac{\partial u}{\partial s}, & \dfrac{\partial u}{\partial t}, & 0 \\ 0, & \dfrac{\partial u}{\partial s}, & \dfrac{\partial u}{\partial t} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - \frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial s}\right),$$

$$-D_2 = \begin{vmatrix} \left(\dfrac{d f}{d y}\right), & \dfrac{\partial f}{\partial s}, & \dfrac{\partial f}{\partial t} \\ \left(\dfrac{d u}{d x}\right), & \dfrac{\partial u}{\partial t}, & 0 \\ \left(\dfrac{d u}{d y}\right), & \dfrac{\partial u}{\partial s}, & \dfrac{\partial u}{\partial t} \end{vmatrix} = \left(\frac{d f}{d y}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{df}{\partial s}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial u}{d s}\right) - \left(\frac{du}{dy}\right)\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$-D_3=\begin{vmatrix} 1\,, & \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), & \frac{\partial f}{\partial t}\,, \\ \frac{\partial u}{\partial s}\,, & \left(\frac{d\,u}{d\,x}\right), & 0 \\ 0\,, & \left(\frac{d\,u}{d\,y}\right), & \frac{\partial u}{\partial t} \end{vmatrix} = -\left(\frac{d\,f}{d\,y}\right)\frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial u}{\partial t}+\left(\frac{d\,u}{d\,x}\right)\frac{\partial u}{\partial t}+ \\ +\left(\frac{d\,u}{d\,y}\right)\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial s}$$

$$-D_4=\begin{vmatrix} 1\,, & \frac{\partial f}{\partial s}\,, & \left(\frac{df}{d\,y}\right) \\ \frac{\partial u}{\partial s}\,, & \frac{\partial u}{\partial t}\,, & \left(\frac{d\,u}{d\,x}\right) \\ 0\,, & \frac{\partial u}{\partial s}\,, & \left(\frac{d\,u}{d\,y}\right) \end{vmatrix} = \left(\frac{d\,f}{d\,y}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2-\left(\frac{d\,u}{d\,x}\right)\frac{\partial u}{\partial s}+ \\ +\left(\frac{d\,u}{d\,y}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial u}{\partial s}\right) \quad (2)$$

Ha most már $\Delta = 0$, akkor az (1.) lineáris rendszer egyenletei közt vagy ellenmondás van, és igy közös integrál egyáltalában nincs, vagy pedig D_2, D_3 és D_4 szintén eltünnek. De ennek jelentését könnyü megállapitani. A $\Delta = 0$ ismét csak azt mondja, hogy az $r + f = 0$ és $u = a_1$ charakteristikus egyenleteinek egy közös gyökük van, és a Δ, D_2, D_3, D_4 együttes eltünése egyszerüen azt mondja, hogy u eleget tesz a IV. szak. kezdetén fölállitott 3 egyenletnek, vagyis az S rendszerek egyikének, beleértve már a charakteristikus egyenlet 0 gyökének megfelelő esetet is.

Ha $\frac{\partial u}{\partial s} = 0$, Δ csak úgy tünteti el, ha $\frac{\partial u}{\partial t}$ is zérus, a mely eset tehát megint a kezdettől fogva kizárandó s és t-t nem tartalmazó u alakokra vezet.

A mi esetünkben tehát d_1, d_2, d_3, d_4 alatt értve az (1.) egyenletrendszer megoldásait, a következő rendszert nyerjük:

$$\frac{d\,s}{d\,x}=d_2,\quad \frac{d\,s}{d\,y}=d_3, \\ \frac{d\,t}{d\,x}=d_3,\quad \frac{d\,t}{d\,y}=d_4 \\ \frac{d\,p}{d\,x}=r,\quad \frac{d\,p}{d\,y}=s, \quad (3)$$

$$\frac{dq}{dx} = s, \quad \frac{dq}{dy} = t,$$
$$\frac{dz}{dx} = p. \quad \frac{dz}{dy} = q,$$

E rendszer, ha benne r értekét az $r + f = 0$ egyenletből véve gondoljuk, föltétlenül integrálható lesz és az akkor belőle meghatározott z függvény az $r + f = 0$ teljes integrálja.

Először is látni, hogy ha z, p, q, s, t oly függvények, melyek e rendszer megoldását adják, akkor a függvényeknek az utolsó négy egyenletben kifejezett kapcsolatánál fogva a

$$\frac{dp}{dx} = r$$

egyenlet azt mondja, hogy z egyszersmind az $r + f = 0$ differencziálegyenlet megoldása. A rendszer keletkezésénél fogva $z = F$ (az $r + f = 0$ ama teljes integrálja, mely az $u = a_1$-nek is megfelel) és a belőle keletkező p, q, s, t függvények kielégitik a rendszert. Már ez mutatja, hogy a rendszer föltétlenül integrálható, mert a megoldás öt tetszőleges állandót tartalmaz. Jó lesz még megjegyezni, hogy ha az integrabilitási feltételek nem volnának identitások, ezek egy ujabb relácziót adnának, x, y, z, p, q, s, t *közt*, vagyis egy ujabb másodrendű egyenletet adnának, melynek $z = F$ megoldása és mely nem lehet $r + f = 0$-sal aequivalens, mert benne r elő sem fordul. Tételünk tehát be van bizonyitva.

Látni továbbá, hogy ha az $r + f = 0$ és $u = a_1$ közös integrálja $z = F$ nem teljes integrálja az első egyenletnek, akkor a megfelelő z, p, q, s, t értékek közt mindig létezik egy állandó nélküli reláczió. A (3.)-nak megfelelő z, p, q, s, t függvények közt tehát fönnáll ugyanez a reláczió, tehát legfölebb 4 állandót tartalmaznak és a (3.) nem lehet föltétlenül integrálható. Kimondhatjuk tehát a következő tételt is:

Ha az u oly függvény, hogy a d_1, d_2, d_3, d_4-nek az (1.)-nek megfelelő értékei mellett a (3.) föltétlenül integrálható, a (3.)-ból meghatározott és 5 tetszőleges állandót tartalmazó z függvény az $r + f = 0$-nak teljes integrálja és egyszersmind az $u = a_1$-nek is integrálja. Ha pedig u e föltételnek nem tesz eleget, az $r + f = 0$ és $u = a_1$ rendszer nem adhatja az $r + f = 0$ teljes integrálját.

Igy tehát a keresett u függvények meghatározhatók abból a föltételből, hogy a (3.) alatti rendszer föltétlenül integrálható legyen.

2. Áttérünk ezen *integrabilitási föltételek részletezésére.* A két utolsó egyenletből folyó föltételek:

$$\frac{dq}{dx} - \frac{dp}{dy} = 0$$

$$\frac{dt}{dx} - \frac{ds}{dy} = 0$$

a differencziálhányadosoknak a rendszerben foglalt értékei következtében mindig identikus módon lesznek kielégítve.

Hasonlóképen a harmadik egyenletpárból folyó föltétel. Mert

$$\frac{ds}{dx} - \frac{dr}{dy} \equiv \frac{ds}{dx} + \frac{df}{dy} \equiv d_2 + \left(\frac{df}{dy}\right) + \frac{df}{ds} d_3 + \frac{df}{dt} d_4$$

identice zerus, mert hiszen a *d-k* az (1.) megoldásából keletkező értékek; a mit pedig nyertünk, épen nem más, mint az (1.) alatt álló második egyenlet többtagúja, mely ekkor mindig 0.

Maradnak csupán az első és második egyenletpárból következő föltételek, melyeknek közvetetlen alakja:

$$\frac{d}{dx} d_3 - \frac{d}{dy} d_2 = 0$$

$$\frac{d}{dx} d_4 - \frac{d}{dy} d_3 = 0$$

E föltételek kifejtésére fölhasználva a (2.) alatt bevezetett jelzéseket, lesz:

$$di = \frac{D_i}{\Delta}, \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

és igy a keresett föltételek:

$$T_1 \equiv \left(\Delta \frac{dD_3}{dx} - D_3 \frac{d\Delta}{dx}\right) - \left(\Delta \frac{dD_2}{dy} - D_2 \frac{d\Delta}{dy}\right) = 0$$

$$T_2 = \left(\Delta \frac{dD_4}{dx} - D_4 \frac{d\Delta}{dx}\right) - \left(\Delta \frac{dD_3}{dy} - D_3 \frac{d\Delta}{dy}\right) = 0 \qquad (4)$$

A T_2 és T_4 kifejtésében a Δ nevező, mely a differencziálás következtében ujból fölléphetne, egészen kiesik. Ez az első és harmadik tagban önként világos. A második és negyedik tagban a Δ nevező föllép, midőn a $\frac{d}{dx}$ és $\frac{d}{dy}$ operácziók részletezésében $d_2 \frac{\partial}{\partial x}$ s. u. t. irandó. De ezen tagokat összefoglalva a számlálóban a $D_3{}^2 - D_2 D_4$ tényező lép föl, mely mint a szorzat egyszerű kifejtése mutatja, mindig osztható Δ által. Ebben az alakban, hol Δ^2-tel szoroztunk, tehát csak a $\Delta = 0$ elsőrendű differencziálegyenlet megoldásai lépnek még hozzá az u keresett értékeihez. A differencziálegyenlet alakjából közvetlenül kiolvasható $\Delta = 0$ megoldások épen ugy kizárandók, mint az analog megoldások ama resolvensben, melyet az elsőrendű differencziálegyenletek tárgyalásánál nyerünk.

Különben *a* (4.) *alatt álló alakok oly másodrendű parcziális differencziálegyenleteket adnak az u meghatározására, melyeknek többtagúja az u-t magát nem tartalmazza, az u összes differencziálhányadosainak egész, a második differencziálhányadosoknak pedig lineáris függvénye, míg független változók gyanánt x, y, z, p, q, s és t szerepelnek.*

Megjegyzendő még, hogy az x és y szerinti teljes differencziálás végrehajtásánál a, z, p, q, s, t differencziálhányadosainak értéke a (3,) alatt álló rendszerből veendő, azaz $\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}$ a következő operácziók jelei: (5)

$$\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial z} - f \frac{\partial}{\partial p} + s \frac{\partial}{\partial q} + d_2 \frac{\partial}{\partial s} + d_3 \frac{\partial}{\partial t},$$
$$\frac{d}{dy} = \frac{\partial}{\partial y} + q \frac{\partial}{\partial z} + s \frac{\partial}{dp} + t \frac{\partial}{dq} + d_3 \frac{\partial}{ds} + d_4 \frac{\partial}{\partial t}.$$

3. *Alapvető fontosságú, hogy az u számára nyert két differencziálegyenlet egy egyetlen által pótolható. Ennek kimutatására szolgál a*

$$\frac{\partial u}{\partial s} T_4 + \frac{\partial u}{dt} T_2 = o \tag{6}$$

identitás, melynek igazolásával kell első sorban foglalkoznunk.

Föltételezve, hogy $\frac{\partial u}{\partial t}$ *nem o*, az (1.) rendszerből nyerjük:

$$-d_4 = \frac{\left(\frac{du}{dy}\right) + \frac{\partial u}{\partial s} d_3}{\frac{\partial u}{\partial t}}$$

$$-d_3 = \frac{\left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{\partial u}{\partial s} d_2}{\frac{\partial u}{\partial t}}$$

Ezeket differencziálva és a differencziálhányados számlálójának második tagjában $\left(\frac{du}{dx}\right)$ és $\left(\frac{du}{dy}\right)$ értékét bevezetve, az (1.) egyenletekből:

$$-\frac{d}{dx} d_4 = \frac{\frac{d}{dx}\left[\left(\frac{d}{dy}\right) + \frac{\partial u}{\partial s} d_3\right] + d_4 \frac{d}{dx}\frac{\partial u}{\partial t}}{\frac{\partial u}{\partial t}}$$

$$-\frac{d}{dy} d_3 = \frac{\frac{d}{dy}\left[\left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{\partial u}{ds} d_2\right] = d_3 \frac{d}{dy}\frac{\partial u}{\partial t}}{\frac{\partial u}{\partial t}} \tag{7}$$

hol még a $\left(\frac{du}{dx}\right)$ és $\left(\frac{du}{dy}\right)$ értelme, a mint azt az I. szakaszban (6.) alatt megállapitottuk, ha még r értékét az $r + f = o$ egyenletből beteszszük, a következő:

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} p - \frac{\partial u}{\partial p} f + \frac{\partial u}{\partial q} s$$

$$\left(\frac{du}{dy}\right) = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} q + \frac{\partial u}{\partial p} s + \frac{\partial u}{\partial q} d \tag{8}$$

A differencziálások végzése közvetetlenül mutatja, hogy

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{du}{dy}\right) + \frac{\partial u}{\partial s} d_3\right] + d_4 \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t} =$$

$$= \frac{d}{dy}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial d_3}{\partial x}$$

$$p\frac{\partial}{\partial z}\left[\left(\frac{du}{dy}\right)+\frac{\partial u}{\partial s}d_3\right]+d_4 p\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{d}{dy}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)p-$$

$$-s\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial s}p\frac{\partial d_3}{\partial z}$$

$$-f\frac{\partial}{\partial p}\left[\left(\frac{du}{dy}\right)+\frac{\partial u}{\partial s}d_3\right]-d_4 f\frac{\partial}{\partial p}\frac{\partial u}{\partial t}=$$

$$=\frac{d}{dy}\left(-\frac{\partial u}{\partial p}f\right)+\frac{\partial u}{\partial p}\frac{df}{dy}-\frac{\partial u}{\partial s}f\frac{\partial d_3}{\partial p}$$

$$s\frac{\partial}{\partial q}\left[\left(\frac{du}{dy}\right)+\frac{\partial u}{\partial s}d_3\right]+d_4 s\frac{\partial}{\partial q}\frac{\partial u}{\partial t}=$$

$$=\frac{d}{dy}\left(\frac{\partial u}{\partial q}s\right)+s\frac{\partial u}{dz}-d_3\frac{\partial u}{\partial q}+\frac{\partial u}{ds}s\frac{\partial d_3}{\partial q} \tag{9}$$

$$d_2\frac{\partial}{\partial s}\left[\left(\frac{du}{dy}\right)+\frac{\partial u}{\partial s}d_2\right]+d_4 d_2\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial u}{\partial t}=$$

$$=\frac{d}{dy}\left(\frac{\partial u}{\partial s}d_2\right)+\frac{\partial u}{\partial p}d_2-\frac{\partial u}{\partial s}\frac{d}{dy}d_2+\frac{\partial u}{\partial s}d_2\frac{\partial d_3}{\partial s}$$

$$d_3\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{du}{dy}\right)+\frac{\partial u}{\partial s}d_3\right]+d_4 d_3\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial t}=$$

$$=d_3\frac{d}{dy}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial q}d_3+\frac{\partial u}{\partial s}d_3\frac{\partial d_3}{\partial t}$$

Ezeket összeadva, tekintetbe véve a $\frac{d}{dx}$, $\frac{d}{dy}$, $\left(\frac{d}{dx}\right)$, $\left(\frac{d}{dy}\right)$ operácziók értelmét, valamint azt, hogy a jobb oldalon a $\frac{\partial u}{\partial p}$ együtthatja

$$\frac{df}{dy}+d_2=\left(\frac{df}{dy}\right)+\frac{\partial f}{\partial s}d_3+\frac{\partial f}{\partial t}d_4+d_2$$

az (1.) rendszer második egyenlete szerint 0, az eredmény lesz

$$\frac{d}{dx}\left[\left(\frac{du}{dy}\right)+\frac{\partial u}{\partial s}d_3\right]+d_4\frac{d}{dx}\frac{\partial u}{\partial t}=$$

$$=\frac{d}{dy}\left[\left(\frac{du}{dx}\right)+\frac{du}{ds}d_2\right]+d_3\frac{d}{dy}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial s}\left(\frac{d}{dx}d_3-\frac{d}{dy}d_2\right)$$

vagyis

$$\frac{\partial u}{\partial s}\left(\frac{d}{d x} d_3 - \frac{d}{d y} d_2\right) + \frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{d}{d x} d_4 - \frac{d}{d y} d_3\right) = 0 \quad (10)$$

De *a nyert reláczió akkor is helyes marad, ha* $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$.

Ekkor ugyanis a második tag elesik, az elsőben pedig

$$\frac{d}{d x} d_3 - \frac{d}{d y} d_2 = 0$$

identitás lesz.

Ekkor ugyanis sem $\frac{\partial u}{\partial s}$, sem $\frac{\partial f}{\partial t}$ nem lehet 0, mert különben Δ is eltünik, és igy most

$$-d_2 = \frac{\left(\frac{d u}{d x}\right)}{\frac{\partial u}{\partial s}}$$

$$-d_3 = \frac{\left(\frac{d u}{d y}\right)}{\frac{\partial u}{\partial s}}$$

$$-d_4 = \frac{\left(\frac{d f}{d y}\right)\frac{\partial u}{\partial s} - \left(\frac{d u}{d x}\right) - \frac{\partial f}{\partial s}\left(\frac{d u}{d y}\right)}{\frac{\partial u}{\partial s}\;\frac{\partial f}{\partial s}}$$

Ezekből

$$-\frac{d}{d y} d_2 = \frac{\frac{d}{d y}\left(\frac{d u}{d x}\right) + d_2 \frac{d}{d y}\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)}{\frac{\partial u}{\partial s}}$$

$$-\frac{d}{d x} d_3 = \frac{\frac{d}{d x}\left(\frac{d u}{d y}\right) + d_3 \frac{d}{d x}\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)}{\frac{\partial u}{\partial s}}$$

De a (9.) alatti identitások minden u-ra nézve helyesek. Ha tehát fölteszszük, hogy ez nem tartalmazza t-t, tehát $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, az összeadás eredménye így is irható:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dy}\right) + \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial u}{\partial s} d_3\right) = \frac{d}{dy}\left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{\partial u}{\partial s} d_2\right) +$$
$$+ \frac{\partial u}{\partial s}\left(\frac{d}{\partial x} d_3 - \frac{d}{dy} d_2\right)$$

vagyis, ha mindkét oldalon a második tag dífferencziálását elvégezzük és röviditünk:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dy}\right) + d_3 \frac{d}{dx} \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{d}{dy}\left(\frac{du}{dx}\right) + d_2 \frac{d}{dy} \frac{\partial u}{\partial s}$$

a mi, ha a d_2, d_3 differencziálhányadosainak mostani értékeit tekintetbe veszszük, az állitott egyenletet adja.

A (10.) reláczió tehát helyes, ha u nem megoldása a $\Delta = 0$ egyenletnek. Ha most d_i-nek $\frac{D_i}{\Delta}$ alakját bevezetjük, a Δ^2 nevezőt, mely nem 0, el is hagyhatjuk, és igy lesz

$$\frac{\partial u}{\partial s} T_4 + \frac{\partial u}{\partial t} T_2 = 0$$

minden u-ra nézve, mert a $\Delta = 0$ eddig kizárt megoldásai is megfelelnek ezen egyenletnek. A T_4 és T_2-nek (4.) alatt részletesen kiirt alakjából kitünik ugyanis, hogy T_2 és T_4 külön-külön eltünnek, mihelyt $\Delta = 0$.

Minthogy pedig a vizsgált kifejezés eltünik, bármi függvény is legyen u, világos, hogy identice 0; mert különben ama követelés, hogy p. egy legyen, differencziálegyenletet adna, melynek egy u megoldását is lehetne találni, ellentétben a bebizonyitottakkal.

E szerint most már szükségkép T_2 minden tagja osztható $\frac{\partial u}{\partial e}$-sel és T_4 minden tagja $\frac{\partial u}{\partial t}$-vel. Legyen most már

$$R = \frac{T_2}{\frac{\partial u}{\partial s}} = \frac{T_4}{\frac{\partial u}{\partial t}}$$

hol R ismét az u összes differencziálhányadosainak egész, a második differencziálhányadosoknak pedig lineáris egész függvénye, akkor az u számára nyert két differencziálegyenlet

$$T_2 = 0, \; T_4 = 0$$

igy is irható

$$\frac{\partial u}{\partial s} R = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} R = 0,$$

vagy miután az oly u függvény, mely sem s-et, sem t-t nem tartalmazza, ugy sem felelhet meg, *szükséges és elegendő, hogy u az $R = 0$ egyenlet oly megoldása legyen, melyre nézve Δ nem tünik el.*

4. E tárgyalások kielégitésére még közelebbről megvizsgálandók az $R = 0$ egyenlet ama megoldásai, melyek egyszersmind a $\Delta = 0$ elsőrendű differencziálegyenlet megoldásai. Erre vonatkozólag legczélszerűbb visszamenni ama differencziálegyenlet rendszerre (III. szak. (2.) alatt), mely az u és v függvényeket határozza meg.

Ha $\Delta = 0$, ismét az $r + f = 0$ és $u = a_1$ charakteristikus egyenleteinek közös gyökük van. Ha az idézett egyenletekben az elsőt $\frac{\partial u}{\partial s}$-sel, a másodikat $\frac{\partial u}{\partial t}$-vel szorozzuk és a kettőt egymásból kivonjuk a $\Delta = 0$ relácziό miatt a $\left(\frac{d\,v}{d\,y}\right)$ együtthatója eltünik és lesz:

$$\left\{\frac{\partial u}{\partial s}\left[\left(\frac{d f}{d y}\right)\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial t}\left(\frac{d u}{d y}\right)\right] - \frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{d u}{d x}\right)\right\}\frac{\partial v}{\partial s} +$$
$$+\left\{\frac{\partial u}{\partial s}\left[\left(\frac{d u}{d x}\right) + \frac{\partial f}{\partial s}\left(\frac{d u}{d y}\right) - \left(\frac{d f}{d y}\right)\frac{\partial u}{\partial s}\right] - \right.$$
$$\left. - \frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{d u}{d y}\right)\right\}\frac{\partial v}{\partial t} = 0,$$

vagy ha a charakteristikus egyenletek közös gyökét μ-t ismét a

$$\frac{\partial u}{\partial t}\mu + \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad \mu^2 + \frac{\partial f}{\partial s}\mu + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

relácziók segitségével behozzuk:

$$\frac{\partial u}{\partial s}\left[\left(\frac{d u}{d x}\right)+\left(\mu+\frac{\partial f}{\partial s}\right)\left(\frac{d u}{d y}\right)-\left(\frac{d f}{d y}\right)\frac{\partial u}{\partial s}\right]\left[\frac{\partial v}{\partial s}\mu+\frac{\partial v}{\partial t}\right]=0.$$

Az első tényező eltünése $\Delta = 0$ miatt maga után vonja, hogy $\frac{\partial u}{\partial t}$ is 0; az illető u függvény tehát használhatatlan volna, mert sem s-et, sem t-t nem tartalmazza. Ha a második tényező zérus, ez a $\Delta = 0$-sal együtt azt mondja, hogy u az S rendszernek megoldása. Ha végre a harmadik tényező tünik el, ismét használhatatlan u-t kapunk, mert mint könnyű látni, u és v függvénydeterminánsa s és t szerint 0, és igy az $u = a_1$ ës $v = a_2$ egyenletek nem oldhatók meg s és t szerint.

Ezek szerint *az $R = 0$ másodrendü differencziálegyenlet (a megoldások minden megszoritása nélkül) az u és v-re felállitott differencziálegyenletrendszernek a v eliminácziója által keletkező »resultánsa«; a kizárt megoldások, hol t. i. az S rendszerek egyikéből csak az első egyenletnek felel meg u, egyszerüen azok, melyekben u és v függvénydeterminánsa eltünik.*

5. Az eddigiekben a másodrendű parcziális differencziálegyenlet integrácziójára vonatkozó eredmények összeállítva a következők:

Adva lévén az

$$r + f = 0$$

differencziálegyenlet, a (2.) alatt értelmezett Δ, D_2, D_3, D_4 kifejezések segitségével képezzük az

$$R \equiv \frac{\left(\Delta\frac{d D_3}{d x}-D_3\frac{d\Delta}{d x}\right)-\left(\Delta\frac{d D_2}{d y}-D_2\frac{d\Delta}{d y}\right)}{\frac{\partial u}{\partial t}} \equiv$$

$$\equiv \frac{\left(\Delta\frac{d D_4}{d x}-D_4\frac{d\Delta}{d x}\right)-\left(\Delta\frac{d D_3}{d y}-D_3\frac{d\Delta}{d y}\right)}{\frac{\partial u}{\partial s}} = 0.$$

differencziálegyenletet, melyben u az ismeretlen függvény, x, y, z, p. q, s, t a független változók.

E differencziálegyenlet minden partikuláris megoldása, mely nem egyszersmind megoldása a $\Delta = 0$ egyenletnek is, a vizsgált egyenletnek egy teljes integrálját adja. Ha t. i. az (1.) alatti rendszerből d_2, d_3, d_4-et meghatározzuk és az ekkor föltétlenül integrálható (3.) alatti rendszert integráljuk, ebből z-t mint 5 állandót tartalmazó függvényt nyerjük, mely az $r + f = 0$ teljes integrálja.

Ha u oly partikuláris megoldás, mely egyszersmind a $\Delta = 0$ megoldása is, a mi annyit jelent, hogy u kielégiti a IV. szakaszban (3.) alatt fölállitott S rendszerek egyikének első egyenletét, az $r + f = 0$ integrácziója végett visszatérhetünk a III. szakaszban (2.) alatt fölállitott rendszerhez, mely u-hoz oly v-t szolgáltat, hogy $r + f = 0$, $u = a_1$, $v = a_2$ föltétlenül integrálható legyen.

Ha u kielégiti az illető S rendszer második egyenletét is a IV. és V. szakaszban kifejtett módszerek szerint az $r + f = 0$-nak végtelen sok teljes integrálját, azaz egy tetszőleges függvényt tartalmazó integrálját nyerjük, két ilyen u-ból pedig az általános integrált.

Ha végre u csak a $\Delta = 0$, de egyik S rendszernek sem megoldása, akkor ez nem szolgáltatja az $r + f = 0$ teljes integrálját, mert a kiegészitésül felállitandó $u = a_1$, $v = a_2$ egyenletek nem oldhatók meg s és t szerint.

Az $R = 0$ egyenlet ama kivételes megoldásainak szerepe, melyek t. i. a $\Delta = 0$-nak is megoldásai, a megelőzőkben kifejtett módszerek nélkül is, tisztán e szakasz tárgyalásai alapján volna megállapitható.

Hogy ily u, mely nem megoldása az S rendszerek egyikének, nem adhat teljes integrált, onnét is látni, hogy az (1.) egyenletei ekkor ellenmondást foglalnak magukban, tehát $r + f = 0$ és $u = a_1$-nek oly közös integrálja, mely az elsőnek teljes integrálja, nincs is.

A másik esetben az (1.) rendszer megoldható, még pedig úgy, hogy d_4 szabadon választott értékének, a d_1, d_2, d_3 meghatározott értékei felelnek meg. A 3-ik és 4-ik egyenlet ugyanis mindig független egymástól; mert különben $\frac{\partial u}{\partial s}$ és

$\frac{\partial u}{\partial t}$ eltünnének, és igy u nem tartalmazná s-et és t-t, a mi nem lehetséges. A Δ tehát ugy tünik el, hogy a második egyenlet a 3-ik és 4-ik kombinácziója. A (10.) alatt lehozott relácziónál:

$$\frac{\partial u}{\partial s}\left(\frac{d}{dy} d_2 - \frac{d}{dy} d_3\right) + \frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{d}{dx} d_4 - \frac{d}{dy} d_3\right) = 0$$

csak az lett föltételezve, hogy d_2, d_3, d_4 az (1.) egyenletrendszer megoldásai, és ha ilyen megoldások léteznek, mint a mostani esetben, helyes marad, ámbár $\Delta = 0$.

Igy tehát, hogy a (3.) rendszer föltétlenül integrálható legyen, elég d_4-et úgy meghatározni, hogy

$$\frac{d}{dx} d_4 - \frac{d}{dy} d_3 = 0 \tag{11}$$

legyen, ebből azután a másik föltétel önként következik; mert most $\frac{\partial u}{\partial s}$ nem lehet 0. Ekkor ugyanis a

$$\frac{\partial u}{\partial s}\mu + \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

miatt $\frac{\partial u}{\partial t}$ is eltünnék, a mi lehetetlen.

A (11.) föltétel azonban most föltétel a d_4 meghatározására. Ugyanis az (1.) rendszer szerint

$$-d_3 = \frac{\left(\frac{du}{dy}\right) + \frac{\partial u}{\partial t} d_4}{\frac{\partial u}{\partial s}} \tag{12}$$

$$-d_2 = \frac{\left(\frac{df}{dy}\right)\frac{\partial u}{\partial s} - \frac{\partial f}{\partial s}\left(\frac{du}{dy}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial s} - \frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial u}{\partial t}\right) d_4}{\frac{\partial u}{\partial s}}$$

Ha a d_3 ezen értékét a (11.)-be beviszszük és a $\frac{d}{dx}$, $\frac{d}{dy}$ operácziók kifejtésénél d_2, d_3 értékét az utolsó egyenletekből veszszük, *elsőrendü parcziális differencziálegyenletet nyerünk d_4 számára, mely ezt meghatározza, mint az x, y, z, p, q, s, t függvényét.* És a d_4 minden ily értéke a hozzátartozó d_2 és d_3-mal a (3.) rendszert föltétlenül integrálhatóvá teszi, tehát az $r+f=0$ egy-egy teljes integrálját adja. A d_4-hez tartozó d_2 és d_3 értékét egyszerüen a (12.) egyenletekből veszszük.

6. Utolsó föladatunk most még megállapitani, hogy miként nyerjük az $r+f=0$ egyenletnek egy bizonyos teljes integrálját, vagy más szóval, hogy *mikép választandók az u, illetőleg u és d_4 oldóegyenletekben a kezdőértékek a teljes integrál szabadon megállapitott kezdőértékeinek megfelelőleg.*

A teljes integrál kezdőértékeit legalkalmasabban, mint az V. szak. elején az

$$\begin{aligned} u_0\,(y, \zeta, \pi, \zeta', \pi', \zeta'') &= a_1 \\ v_0\,(y, \zeta, \pi, \zeta', \pi', \zeta'') &= a_2 \end{aligned} \tag{13.}$$

egyenletek alakjában gondoljuk megállapítva, hol ezen egyenletrendszernek π' és ζ'' szerint megoldhatónak kell lennie. Legalkalmasabb ezen alak, mert ép úgy mint a föltétlenül integrálható rendszerben az a_3, a_4, a_5 állandók itt explicite elő sem fordulnak, és igy az eredmény ezen állandók transformácziójától független.

Az $R=0$ egyes partikuláris megoldását kapjuk, ha $x = x_0$-nak megfelelőleg u és $\frac{\partial u}{\partial x}$ kezdőértékét megállapitjuk Legyenek ezek

$$(u)_{x=x_0} = U\,(y, z, p, q, s, t)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_0} = U'\,(y, z, p, q, s, t).$$

Minthogy az $r+f=0$-nak keresett teljes integrálja közös legyen az $u=a_1$-gyel, kell tehát, hogy

$$U = u_0\,(y, z, p, q. s, t)$$

legyen. Az U' meghatározására vegyük még tekintetbe a rendszer harmadik egyenletét, $v=a_2$. Hogy a (13.) által meghatározott teljes integrált nyerjük, kell, hogy

$$(v)_{x=x_0} = v_0\,(y, \zeta, \pi, \zeta', \pi', , \zeta'')$$

legyen. Az u és v számára nyert differencziálegyenletrendszerben (III. szak. (2.) alatt) szintén x helyébe x_0-ot téve, a két egyenletben $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ helyébe U' és $\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{x=x_0}$, az u és v többi differencziálhányadosai helyébe pedig az U és v_0 differencziálhányadosai jönnek, természetesen még mindenütt felcserélve a

$$z, p, q, s, t$$

jeleket a

$$\zeta, \pi, \zeta', \pi', \zeta''$$

betűkkel. Ha most a két egyenletből $\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{x=x_0}$-ot eliminálјuk, *az eredő egyenletben U'-et meghatározzuk az ismeretes U és v_0 függvényekből,* a mivel föladatunk általánosságban meg van oldva.

Kivétel ez alól csak akkor van, ha az u értéke olyan, hogy a $\frac{\partial v}{\partial x}$ nem eliminálható, a mi, mint tudjuk, — az x_0 egyes kivételes értékeinek mellőzésével — akkor és csak akkor történik, ha u az S rendszerek egyikének megoldása. Ebben az esetben a $v_0 = a_2$ egyenletet y szerint differencziálva, kapunk egy lineár egyenletet π'' vagy ζ' meghatározására, mert v_0 a π' és ζ'' mennyiségek között legalább egyet tartalmaz. Ha ép ugy differencziáljuk az $u_0 = a_1$ egyenletet is, a kettőből π'' és ζ' mindig meghatározható, mert különben u_0 és v_0 függvénydeterminánsa π' és ζ'' szerint eltünnék, és ekkor a (13.) nem adhatna a ζ és π számára 5 tetszőleges állandót tartalmazó függvényt.

Ha $x = x_0$, akkor $d_4 = \frac{d\,t}{d\,y}$ nem más, mint ζ''', és így, ha ama meghatározás alapján,

$$\zeta''' = \sigma\,(y, \zeta, \pi, \zeta', \pi', \zeta''),$$

a d_4 számára nyert differencziálegyenletnek ama partikuláris integrálja veendő, melyben a kezdőérték

$$(d_4)_{x=x_0} = \sigma\,(y, z, p, q, s, t).$$

Az U' és vele együtt u is, melyet még d_4 előtt kell meghatározni, adva van, mert akkor u két elsőrendű differencziálegyenletnek is megoldása, melyeknek mindegyike megadja U'-t az U-ból és differencziálhányadosaiból.

Könnyü látni, hogy az U vagy u_0 amaz alakjai, melyekkel ebben az esetben van dolgunk, maguk is elsőrendű differencziálegyenlet által vannak adva. Különben erre vonatkozólag az V. szakaszban már egyszerűbb módszert is nyertünk.

VII.

A teljes integrál értelmezésének általánositása.

1. E fejezet tárgyalásaiban, melyek különben akárhány független változót tartalmazó differencziálegyenletekre ép ugy ismételhetők, a két független változót tartalmazó n-edrendű parcziális differencziálegyenletet veszszük föl alapúl. A differencziálhányadosok általános jelölésére legyen

$$\frac{d^{i+k} z}{dx^i \, dy^k} = p_{ik}, \quad z = p_{00},$$

melyek mellett azonban, a kapcsolat jobb föltüntetése végett, a z, p, q, r, s, t jeleket is megtartjuk.

Az

$$\mathfrak{F}(x, y, z, p, q, \ldots, p_{n0}, \ldots p_{0n}) = 0$$

teljes integrálja alatt oly módon meghatározott z = t *értünk:*

$$z = F(x, y, a_1, a_2, \ldots, a_N),$$

mely az $\mathfrak{F} = 0$-*ot kielégiti, de ezen kivül semmi más az a-kat nem tartalmazó n-ed (vagy alacsonyabb) rendű differencziál egyenletnek nem tesz eleget.*

A közönséges értelmezéssel szemben elhagytuk itt azon megállapitást, hogy a tetszőleges állandók száma a teljes integrálban egyenlő legyen az összes differencziálhányadosok számával, mely

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1.$$

Hogy a tetszőleges állandók száma a teljes integrálban nem lehet ennél kisebb, az világos, mert különben az illető z-re nézve mindig lehet több különböző n-edrendű egyenletet föl-állítani; de lehet ennél nagyobb.

Általánosságban, *ha a tetszőleges állandók száma*

$$N = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1 + k$$

a teljes integrált k-adfajunak nevezzük, úgy hogy a 0 fajú a közönséges, (szűkebb értelemben vett) teljes integrállal összeesik.[1])

Az értelmezés e bővitésének jogosultsága kitünik abból, hogy a teljes integrál jellemző tulajdonsága az uj alakokra is kiterjed, t. i.

Legyen φ az $\mathfrak{F} = 0$ bárminő integrálja, akkor az a_1, a_2, ..., a_N állandók variácziója által, azaz úgy, hogy az a-k helyébe az x és y-nak bizonyos függvényeit teszszük, mindig el lehet érni, hogy legyen

$$F(x, y, a_1, a_2, \ldots, a_N) = \varphi.$$

A tétel bebizonyitása épúgy történik, mint a közönséges teljes integrálnál. Legyen ugyanis

$$p^{ik} = \frac{d^{i+k} z}{dx^i \, dy^k}$$

valamelyike a z, p, ... p_{on} mennyiségeknek [2]), mely az $\mathfrak{F} = 0$ egyenletben valóban bennfoglaltatik, határozzuk meg azután az a-kat ugy, hogy a

$$\begin{aligned} &\varphi = F, \\ &\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad \frac{d\varphi}{dy} = \frac{\partial F}{\partial y}, \qquad (1) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{d^n\varphi}{dx^n} = \frac{\partial^n F}{\partial x^n} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{d^n\varphi}{dy^n} = \frac{\partial^n F}{\partial y^n} \end{aligned}$$

egyenleteknek az egy $\frac{d^{i+k}\varphi}{dx^i \, dy^k}$-nak megfelelő egyenlet kivételével eleget tegyenek. Az $F = 0$ egyenletet p_{ik} szerint megoldott alakban irhatjuk:

$$\frac{d^{i+k} z}{dx^i \, dy^k} = H(x, y, z, p, q, \ldots, p_{no}, \ldots p_{on}),$$

[1]) Fölteszszük természetesen, hogy a tetszőleges állandók az illető kifejtésben már a legkisebb számra hozattak, azaz, hogy az N állandó nem fordul elő csupán $N - l$ az a-kból összeállitott kifejezésben, ekkor ugyanis valóban F is csak $N - l$ állandót tartalmaz.

[2]) Ha $i = k = 0$, akkor $p_{ik} = z$.

hol a jobb oldalon természetesen p_{ki} hiányzik. Akkor az (1.) rendszer és a

$$\frac{d^{i+k}\varphi}{dx^i\, dy^k} = H\left(x, y, \varphi, \frac{d\varphi}{dx}, \frac{d\varphi}{dy}, \ldots, \frac{d^n\varphi}{dx^n}, \ldots, \frac{d^n\varphi}{dy^n}\right)$$

alapján egyszersmind lesz:

$$\frac{\partial^{i+k} F}{\partial x^i\, dy^k} = \frac{d^{i+k}\varphi}{dx^i\, dy^k}.$$

Ha tehát az a-k értékei az (1.) *rendszernek megfelelnek, F maga átmegy φ-be és F differencziálhányadosainak értékei (az n-edrendüekig bezárólag) ugyanazok maradnak, akár tekintetbe veszszük, hogy az* a-k *függvényei x és y-nak, akár pedig csak az explicite előforduló x és y szerint differencziálunk.*

Ha F teljes integrál, az (1.) rendszer az a-k közül választott $\nu = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1$ mennyiség szerint megoldható. Ezeket nevezzük $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$-nek. A többi fölös állandó, melyeknek az (1.) rendszerben tetszőleges függvényértéket lehet adni, t. i. csak úgy nem választhatók, hogy az F, $\frac{\partial F}{\partial x}, \ldots$ függvénydeterminánsa $a_1, \ldots, a_\nu$ szerint eltünjék.

Ha nem lehetne az (1.) rendszert az a-k közül választott ν mennyiség szerint megoldani, volna egy tetszőleges állandók nélküli reláczió F, $\frac{dF}{dx}, \ldots, \frac{d^n F}{dy^n}$ között, azaz F kielégitene egy differencziálegyenletet, mely p_{ik}-t nem tartalmazza, és így a fölvett $p_{ik} = H$-tól különböző.

2. A teljes integrál közönséges, valamint a megelőző pontban bővitett értelmezésének alapja az, hogy az összes n-edrendű differencziálegyenletek köréből az egyetlen $\mathfrak{f} = 0$-t az adottat kiválasztja és megadja.

Hasonló értelmezést alapíthatni mindazon n-edrendű differencziálegyenletekre vonatkozólag, melyek a $z, p, q, \ldots p_{on}, \ldots, p_{no}$ mennyiségek közül nem tartalmazzák a következőket:

$$P_1, P_2, \ldots, P_m.$$

Az $\mathfrak{F} = 0$ *differencziálegyenletnek a* $P_1, P_2, \ldots. P_m$*-et nem tartalmazó n-edrendű differencziálegyenletekre vonatkozó röviden relativ teljes integráljának nevezzük a*

$$z = F(x, y, a_1, a_2, \ldots, a_N)$$

kifejezést, melyben az a-k állandók, és mely kielégíti az $\mathfrak{F} = 0$ *egyenletet, de semmi más az illető osztályba tartozó differencziálegyenletet nem elégít ki.*

Ismét világos, hogy az állandók száma szükségképen legalább is

$$\nu' = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - m - 1,$$

és így ismét *k-adfajú teljes integrálnak mondjuk azt, melyben az állandók száma*

$$N = \nu' + k.$$

Az ily módon értelmezett relativ teljes integrál ismét megtartja a teljes integrálok jellemző sajátságát. Ugyanis:

Ha φ *az* $\mathfrak{F} = 0$ *bármily integrálja, akkor az a állandók variácziója által, azaz ugy, hogy az a-k helyébe az x és y bizonyos függvényeit teszszük, el lehet érni, hogy legyen:*

$$F(x, y, a_1, \ldots, a_N) = \varphi.$$

Ismét az $\mathfrak{F} = 0$ egyenletet az egyik benne előforduló p szerint megoldottnak véve, képezzük ismét az (1.)-nek megfelelő rendszert, melyből most még csak a $P_1, P_2, \ldots, P_m$ -nek megfelelő egyenleteket is kihagyjuk, akkor a további következtetések is ugyanazok maradnak, és minden az uj, hiányos (1.) rendszernek megoldását képező a függvénysorozat az F*-ből átvezet a* φ*-hez ismét azzal a sajátsággal, hogy a* $P_1, \ldots, P_m$ *differencziálhányadosok kivételével az F teljes differencziálása (ha t. i. az a-k alatt a most meghatározott függvényeket értjük) ugyanazon eredményhez vezet, mint a parcziális differencziálás az a-kon kivül explicite előforduló x és y szerint.*

E felfogásban az $r + f = 0$ egyenletnek a megelőzőkben meghatározott teljes integrálja egyszersmind relativ teljes integrálja az $u = a_1$ egyenletnek is, t. i. az r*-et* nem tartalmazó differencziálegyenletek osztályára vonatkozólag.

VIII.

A másodrendü differencziálegyenlet tetszöleges számú állandót tartalmazó teljes integráljának meghatározása.

1. A másodrendű differencziálegyenletet ismét az

$$r + f(x, y, z, p, q, s, t) = 0 \qquad (1)$$

alakban tárgyaljuk.

Ha ezen egyenletnek valamely integrálja közös egy n-edrendü differencziálegyenlettel:

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t, \ldots, p_{n0}, \ldots, p_{0n}) = 0,$$

akkor ezen integrál egyszersmind eleget tesz egy speczialis alakú n-edrendü differencziálegyenletnek is, mely t. i. a k-adik differencziálhányadosokból mindig csak az utolsó kettőt tartalmazza, melynek alakja tehát:

$$u(x, y, z, p, q, s, t, p_{12}, p_{03}, \ldots, p_{1, n-1}, p_{0n}) = 0.$$

Az $F = 0$-ból ugyanis az $r + f = 0$ segitségével eliminálhatjuk r-et, és épugy a k-dik differencziálhányadosok közül az első $k - 2$-t azon egyenletek által, melyek $r + f = 0$-ból $k - 2$-szeres differencziálás által keletkeznek. Ezek következőkép irhatók:

$$\left(\frac{d^{k-2} f}{dx^{k-2}}\right) + p_{k0} + \frac{\partial f}{\partial s} p_{k-1,1} + \frac{\partial f}{\partial t} p_{k-2,2} = 0,$$

$$\left(\frac{d^{k-2} f}{dx^{k-3} dy}\right) + p_{k-1,1} + \frac{\partial f}{\partial s} p_{k-2,2} + \frac{\partial f}{\partial t} p_{k-3,3} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (2)$$

$$\left(\frac{d^{k-2}f}{dy^{k-2}}\right) + p_{2,k-2} + \frac{\partial f}{\partial s} p_{1,k-1} + \\ + \frac{\partial f}{\partial t} p_{0k} = 0,$$

hol általánosságban $\left(\frac{d^{r+s}f}{dx^r\, dy^s}\right)$ *az f-nek illető teljes differencziálhányadosát jelenti azon tagok elhagyásával, melyek a z-nek $r + s + 2$-dik differencziálhányadosait, $p_{i,\, r+s+2-i}$ tartalmazzák.*

A feladat, melyet e fejezetben meg kell oldanunk, a következő: *Meghatározni az u oly alakját, hogy az*

$$r + f = 0, \quad u = a_1$$

egyenleteknek közös teljes integráljuk legyen, és ha u ily alakú, e teljes integrált valóban kiszámitani.

Világos, hogy ez mikép értendő. Az $r + f = 0$-nak magasabb fajú teljes integrálja keresendő, mely relativ teljes integrálja $u = a_1$-nek az n-edrendű differencziálegyenletek amaz osztályára vonatkozólag, melyben a k-adrendű differencziálhányadosok közül az első $k - 1$ mindig hiányzik. *A keresett integrál tehát $2n + 1$ tetszőleges állandót fog tartalmazni az a_1 beszámitásával,* vagyis az $r + f = 0$-ra nézve $2n - 4$ fajú lesz, és 0 fajú az $u = a_1$-re nézve. Több állandót tartalmazó integrált nem kell külön keresnünk, mert ezek a kijelölt integrálok sokasága által önként jelentkeznek.

2. Az $u = a_1$ és $r + f = 0$ egyenleteknek általánosságban csak egy közös teljes integráljuk lehet. Ha ugyanis az $r + f = 0$ egyenletet $n - 1$-szer, az $u = a_1$-et egyszer differencziáljuk, a következő rendszert nyerjük:

$$\left(\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}\right) + p_{n+1,0} + \frac{\partial f}{\partial s} p_{n,1} + \frac{\partial f}{\partial t} p_{n-1,2} = 0,$$

$$\left(\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-2}\, dy}\right) + p_{n1} + \frac{\partial f}{\partial s} p_{n-1,2} + \\ + \frac{\partial f}{\partial t} p_{n-2,3} = 0,$$

. . . .

$$\left(\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}dy^i}\right) + p_{n-i+1,\,i} + \frac{\partial f}{\partial s}p_{n-i,\,i+1} +$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}p_{n-i-1,\,i+2} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3.)$$

$$\left(\frac{d^{n-1}f}{dy^{n-1}}\right) + p_{2,\,n-1} + \frac{\partial f}{\partial s}p_{1,\,n} + \frac{\partial f}{\partial t}p_{0,\,n+1} = 0,$$

$$\left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{\partial u}{\partial p_{1,\,n-1}}p_{2,\,n-1} + \frac{\partial u}{\partial p_{0,\,n}}p_{1\,n} = 0.$$

$$\left(\frac{du}{dy}\right) + \frac{\partial u}{\partial p_{1,\,n-1}}p_{1,\,n} + \frac{\partial u}{\partial p_{0n}}p_{0,\,n+1} = 0,$$

melyben $\left(\frac{du}{dx}\right)$ és $\left(\frac{du}{dy}\right)$ ismét az u teljes differencziálhányadosait jelentik ama tagok elhagyásával, melyekben a z legmagasabb differencziálhányadosai, az $n+1$-rendűek előfordulnak.

Föltételezve, hogy az u oly függvény, melyre nézve a p-k együtthatóinak determinánsa nem tünik el, a z-nek $n+1$-edrendű differencziálhányadosai:

$$p_{n+1,\,0},\ p_{n,\,1}, \ldots,\ p_{n-i,\,i+1}, \ldots,\ p_{2,\,n-1},\ p_{1,\,n},\ p_{0,\,n+1}$$

a rendszerből egyértéküleg lesznek meghatározva, és igy a z meghatározására a következő rendszert nyerjük:

$$\frac{dz}{dx} = p\,,\ \frac{dz}{dy} = q$$

$$\frac{dp}{dx} = r\,,\ \frac{dp}{dy} = s\ ;\ \frac{dq}{dx} = s\,,\ \frac{dq}{dy} = t$$

$$\frac{ds}{dx} = p_{2,1},\ \frac{ds}{dy} = p_{12}\ ;\ \frac{dt}{dx} = p_{12},\ \frac{dt}{dy} = p_{03} \quad (4.)$$

$$\frac{dp_{12}}{dx} = p_{2.2},\ \frac{dp_{1k}}{dy} = p_{13}\ ;\ \frac{dp_{03}}{dx} = p_{13},\ \frac{dp_{03}}{dy} = p_{04}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{d p_{1\,k}}{d x} = p_{2\,k}\,, \quad \frac{d p_{1\,k}}{d y} = p_{1,\,k+1}\,; \quad \frac{d p_{0,\,k+1}}{d x} = p_{1,\,k+1}$$

$$\frac{d p_{0,\,k+1}}{d y} = p_{0,\,k+2}\,,$$

. . . .

$$\frac{d p_{1,\,n-1}}{d x} = p_{2,\,n-1}\,, \quad \frac{d p_{1,\,n-1}}{d y} = p_{2,\,n}\,; \quad \frac{d p_{0,\,n}}{d x} = p_{1,\,n}\,,$$

$$\frac{d p_{0,\,n}}{d y} + p_{0,\,n+1}$$

hol az első oszlopban álló r, $p_{2,1}$, $p_{2,2}, \ldots, p_{2,\,n-2}$ az $r + f = 0$ egyenlet és deriváltjai segitségével kifejezhetők az ugyanazon sorban álló mennyiségek által, tehát

r az s és t,

p_{21} az p_{12} és p_{03},

. . . . . ,

$p_{2,\,n-2}$ a $p_{1,\,n-1}$ és $p_{0,\,n}$

által, valamint továbbá az utolsó sorban állók: $p_{2,\,n-1}$, $p_{1,n}$, $p_{0,n+1}$ a (3.), rendszer segitségével. Ily módon a (4.) *totál* differencziálegyenletrendszer lesz, melyből

$$z\,;\ p, q\,;\ s, t\,;\ \ldots;\ p_{1,k}, p_{0,k+1}\,;\ \ldots;\ p_{1,\,n-1}, p_{0\,n}$$

meghatározandók, mint az x és y függvényei.

Csak a legkedvezőbb esetben, ha t. i. a rendszer föltétlenül integrálható, nyerünk a z számára $2\,n + 1$ állandót tartalmazó függvényt, mely akkor valóban is az $r + f = 0$ és $u = a_1$ közös teljes integrálja[1]). Ha az integrabilitási föltéte-

[1]) Mert ha volna $z, p, q, s, t, \ldots, p_{1,\,n-1}, p_{0n}$ közt oly reláczió, mely tetszőleges állandót nem tartalmaz, a (4.)-ben egy függvényt ki lehetne küszöbölni, és a nyerendő legáltalánosabb megoldás nem is tartalmazhatna $2\,n + 1$, hanem csak $2\,n$ állandót. Ugyanezért világos, hogy a $z, p, q, \ldots$ ezen értékei $u = a_1$-be helyettesitve, a_1 számára a $2\,n + 1$ állandó függvényét adják, nem pedig numerikus állandót.

lek nincsenek identicze kielégitve, a közös integrál, ha egyáltalában van ilyen, minden esetre kevesebb állandót tartalmaz.

Több mint egy közös teljes integrál csak akkor lehetséges, ha a (3.)-ban a p-k együtthatóinak determinánsa eltünik.

3. A jelzett kivételes eset jellemzése végett a kérdéses determinánst kiszámitjuk. Ez :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1, & \frac{\partial f}{\partial s}, & \frac{\partial f}{\partial t}, & 0, & \ldots\ldots\ldots, & & 0 \\ 0, & 1, & \frac{\partial f}{\partial s}, & \frac{\partial f}{\partial t}, & 0 \ldots\ldots\ldots, & & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots\ldots\ldots & & 0, & 1, & & \frac{\partial f}{\partial s}, & \frac{\partial f}{\partial t} \\ \ldots\ldots\ldots, & & 0, & & \frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}, & \frac{\partial u}{\partial p_{0n}}, & 0 \\ \ldots\ldots\ldots, & & & 0, & & \frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}, & \frac{\partial u}{\partial p_{0,n}} \end{vmatrix},$$

vagyis, a mint könnyü látni

$$\Delta = \left(\frac{\partial u}{d p_{0,n}}\right)^2 - \frac{\partial u}{d p_{0n}} \frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}} \frac{\partial f}{\partial s} + \left(\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}\right)^2 \frac{\partial f}{\partial t} =$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}\right)^2 \left[\left(-\frac{\frac{\partial u}{\partial p_{0,n}}}{\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}}\right)^2 + \left(-\frac{\frac{\partial u}{\partial p_{0,n}}}{\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}}\right)\frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial t}\right]$$

Ha $\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}} = 0$, Δ csak úgy tünhetik el, ha egyszersmind $\frac{\partial u}{\partial p_{0,n}} = 0$, és így *a Δ identikus eltünése ismét azt* *jelenti, hogy az* $r + f = 0$ *és* $u = a_1$ *differencziálegyenletek charakterikus egyenleteinek:*

$$u^2 + \frac{\partial f}{\partial s} u + \frac{\partial f}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}} u + \frac{\partial u}{\partial p_{on}} = 0,$$

közös gyökük van, vagyis, ha az első egyenlet két gyökét μ_1 *és* μ_2*-vel jelöljük, hogy:*

$$\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}} \mu_1 + \frac{\partial u}{\partial p_{o,n}} = 0 \text{ vagy } \frac{\partial u}{d p_{1,n-1}} \mu_2 + \frac{\partial u}{\partial p_{o,n}} = 0.$$

Ha $\Delta = 0$, a (3.) alatti rendszer egyenletei vagy ellentmondanak egymásnak és akkor közös teljes integrál egyáltalában nem lehetséges, vagy pedig az egyenletek közűl legalább egy a többinek következménye; de ez csak úgy lehetséges, ha az utolsó három egyenlet között van összefüggés, mely esetben ismét kell, hogy a $p_{o,n+1}$ szabadon választott értékének $p_{1,n}$ és $p_{2,n-1}$ meghatározott értéke feleljen meg. A u ugyanis az alapföltevések értelmében a $p_{1,n-1}$ és $p_{o,n}$ mennyiségeknek legalább egyikét mindig tartalmazza.

Ebben az esetben, ha a következő jelzéseket használjuk:

$$-P_{n-1} = \begin{vmatrix} \left(\frac{d^{n-1}f}{dy^{n-1}}\right), & \frac{\partial f}{\partial s}, & \frac{\partial f}{\partial t} \\ \left(\frac{du}{dx}\right), & \frac{\partial u}{\partial p_{o,n}}, & 0 \\ \left(\frac{du}{dy}\right), & \frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}, & \frac{\partial u}{d p_{o,n}} \end{vmatrix} = \begin{matrix} \left(\frac{d^{n-1}f}{dy^{n-1}}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial p_{on}}\right)^2 - \left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial u}{\partial p_{on}} - \right. \\ \left. - \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}\right) - \left(\frac{du}{dy}\right)\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial p_{on}} \end{matrix},$$

$$-P_n = \begin{vmatrix} 1, & \left(\frac{d^{n-1}f}{dy^{n-1}}\right), & \frac{\partial f}{\partial t} \\ \frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}, & \left(\frac{du}{dx}\right), & 0 \\ 0, & \left(\frac{du}{dy}\right), & \frac{\partial u}{\partial p_{o,n}} \end{vmatrix} = \begin{matrix} -\left(\frac{d^{n-1}f}{dy^{n-1}}\right)\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}\frac{\partial u}{\partial p_{o,n}} + \\ + \left(\frac{du}{dx}\right)\frac{\partial u}{\partial p_{o,n}} + \left(\frac{du}{dy}\right)\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}} \end{matrix}, \tag{6}$$

$$-P_{n+1} = \begin{vmatrix} 1, & \dfrac{\partial f}{\partial s}, & \left(\dfrac{d^{n-1}f}{dy^{n-1}}\right) \\ \dfrac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}, & \dfrac{\partial u}{\partial p_{0,n}}, & \left(\dfrac{du}{dx}\right) \\ 0, & \dfrac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}, & \left(\dfrac{du}{dy}\right) \end{vmatrix} = \left(\frac{d^{n-1}f}{dy^{n-1}}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}\right)^2 - \left(\frac{du}{dx}\right)\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}} + \\ + \left(\frac{du}{dy}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial p_{0,n}} - \frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}\right).$$

a Δ, P_{n-1}, P_n, P_{n+1} együttes eltünése szükséges, a mi, mint könnyü látni, annyit jelent, hogy u a

$$\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}\mu + \frac{\partial u}{\partial p_{0n}} = 0,$$

$$\left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\mu + \frac{\partial f}{\partial s}\right)\left(\frac{du}{dy}\right) - \left(\frac{d^{n-1}f}{dy^{n-1}}\right)\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}} = 0$$

által jellemzett, ezentúl röviden mint $S_1^{(n)}$ és $S_2^{(n)}$ idézendő rendszerek egyikének megoldása tartozik lenni, melyeket nyerünk, ha μ helyébe az $r + f = 0$ charakteristikus egyenletének gyökeit, μ_1-et vagy μ_2-t teszszük.

Kimondhatjuk tehát a VI. szak. elején álló tétel általánositását:

Ha az $r + f = 0$ és $u = a_1$ differencziálegyenleteknek van közös teljes integráljok, és u nem megoldása az $S_1^{(n)}$ vagy $S_2^{(n)}$ rendszereknek, akkor csak egy ily közös integrál létezik és a (4.) alatt álló totál differencziálegyenlet-rendszer integrácziója által, mint a z függvénynek e rendszerből vett legáltalánosabb értéke nyerhető. A (4.) rendszernek ebben az esetben föltétlenül integrálhatónak kell lennie.

Azt az esetet, melyben az $S_1^{(n)}$ vagy $S_2^{(n)}$ elsőrendü differencziálegyenlet-rendszerek integrálhatók, és mely a közönséges teljes integrál meghatározásában fölmerült A) eset analogonja, később külön tárgyaljuk és most először azt az esetet vizsgáljuk, mikor

Δ nem tünik el.

4. Ekkor ama követelés, hogy a (4.) rendszer föltétlenül integrálható legyen, ismét mindazon u alakok meghatározására vezet, melyek ama sajátsággal birnak, hogy $r + f = 0$ és $u = a_1$-nek egy és csak egy közös teljes integráljok legyen.

Mindenek előtt ismét ki kell fejtenünk ama föltételeket, melyeknek kielégitése megkivántatik, hogy a (4.) rendszer föltétlenül integrálható legyen. Talán nem fölösleges itt mégegyszer kiemelni, hogy e rendszerben minden előforduló menynyiséget

$$z, p, q;\ s, t;\ \ldots;\ p_{1,k-1}, p_{0,k};\ \ldots;\ p_{1,n-1}, p_{0n}$$

által kifejezve gondoljuk, még pedig az átszámitás ismeretes egyenletek segitségével történik, csak $p_{2,n-1}$, $p_{1,n}$, $p_{0,n+1}$ alakjában fordúl elő a még meghatározandó u függvény.

Midőn x vagy y szerint teljesen differencziálunk a $z, p, q;\ s, t;\ \ldots;\ p_{1,k}, p_{0,k+1}, \ldots, p_{1,n-1}$ és p_{0n} differencziálhányadosainak értéke a (4.)-ből helyettesitendő, úgy hogy a következőkben a $\frac{d}{dx}$, $\frac{d}{dy}$ operácziók értelme a következő:

$$\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + p\frac{\partial}{\partial z} + r\frac{\partial}{\partial p} + s\frac{\partial}{\partial q} + \ldots\ldots + p_{2,k}\frac{\partial}{\partial p_{1,k}} +$$
$$+ p_{1,k+1}\frac{\partial}{\partial p_{0,k+1}} + \ldots\ldots + p_{2,n-1}\frac{\partial}{\partial p_{1,n-1}} + p_{1,n}\frac{\partial}{\partial p_{0n}},$$
$$(7)$$
$$\frac{d}{dy} = \frac{\partial}{\partial y} + q\frac{\partial}{\partial z} + s\frac{\partial}{d p} + t\frac{\partial}{\partial q} + \ldots\ldots + p_{1,k+1}\frac{\partial}{\partial p_{1,k}} +$$
$$+ p_{0,k+2}\frac{\partial}{\partial p_{0,k+1}} + \ldots\ldots + p_{1,n}\frac{\partial}{\partial p_{1,n-1}} + p_{0,n+1}\frac{\partial}{\partial p_{0,n}},$$

a hol azután $r, \ldots, p_{2,k}, \ldots p_{2n-1};\ p_{1,n}, p_{0,n+1}$ értéke ismét az (1.), (2.) és (3.) egyenletekből veendő.

Világos először is, hogy a harmadik és negyedik oszlopban álló differencziálegyenletekből keletkező integrabilitási feltételek, *az utolsó egyenletpárnak megfelelő kivételével* identicze vannak kielégítve. Igy általánosságban

$$\frac{dp_{0,k+2}}{dx} - \frac{dp_{1,k+1}}{dy} = 0,$$

mert a reá következő sorban a második és harmadlk oszlopban álló egyenletek szerint e differencziálhányadosok egyènlők tartoznak lenni.

A mi az első és második oszlopban álló egyenleteket illeti, az első miatt kell, hogy legyen

$$\frac{ds}{dx} - \frac{dr}{dy} = \frac{ds}{dx} + \frac{df}{dy} =$$

$$= \left(\frac{df}{dy}\right) + p_{2,1} + \frac{\partial f}{\partial s} p_{1,2} + \frac{\partial f}{\partial t} p_{0,3} = 0,$$

a mi valóban identitás, mert $p_{2,1}$ épen ezen egyenletből számitandó ki. Hasonlóképen a második sorban álló egyenleteknek megfelelőleg

$$\frac{dp_{12}}{dx} - \frac{dp_{21}}{dy} = 0,$$

mert magából a (4.)-ből

$$\frac{dp_{12}}{dx} = p_{22}$$

és az $r + f = 0$-ból:

$$-p_{21} = \frac{df}{dy},$$

úgy hogy

$$-\frac{dp_{21}}{dy} = \frac{d^2f}{dy^2} = \left(\frac{d^2f}{dy^2}\right) + \frac{\partial f}{\partial s} p_{13} + \frac{\partial f}{\partial t} p_{0,4},$$

hol a jobb oldalon álló kifejezés a (2.) egyenletek szerint egyenlő — p_{22}-vel. Hasonlókép általánosságban

$$\frac{dp_{1k}}{dx} = p_{2k}$$

és az $r + f = 0$ egyenletből

$$-\frac{dp_{2,k-1}}{dy} = \frac{d^{k-1}f}{dy^{k-1}} = \left(\frac{d^{k-1}f}{dy^{k-1}}\right) + \frac{\partial f}{\partial s} p_{1,k} + \frac{\partial f}{\partial t} p_{0,k+1}$$

a miből a (3.) szerint:

$$\frac{dp_{1k}}{dx} - \frac{dp_{2,k-1}}{dy} = 0.$$

Így tehát az összes integrabilitási föltételek, kivéve azokat, melyek az utolsó sorban álló egyenletpárokból keletkeznek, identice leszuek kielégítve és az u meghatározására két föltétel marad, t. i.

$$\frac{d}{dx} p_{1n} = \frac{d}{dy} p_{2,n-1},$$

$$\frac{d}{dx} p_{o,n+1} = \frac{d}{dy} p_{1,n},$$

a melyek még, tekintetbe véve, hogy az (5.) és (6.) alatt bevezetett jelzések értelmében

$$p_{2,n-1} = \frac{P_{n-1}}{\Delta},\quad p_{1,n} = \frac{P_n}{\Delta},\quad p_{o,n+1} = \frac{P_{n+1}}{\Delta}, \tag{8}$$

a következő alakba mennek át:

$$T_{n+1} = \left(\Delta \frac{dP_n}{dx} - P_n \frac{d\Delta}{dx}\right) - \left(\Delta \frac{dP_{n-1}}{dy} - P_{n-1} \frac{d\Delta}{dy}\right) = 0,$$

$$T_{n-1} = \left(\Delta \frac{dP_{n+1}}{dx} - P_{n+1} \frac{d\Delta}{dx}\right) - \left(\Delta \frac{dP_n}{dy} - P_n \frac{d\Delta}{dy}\right) = 0. \tag{9}$$

Megjegyzendő, hogy T_{n-1} és T_{n+1} az u differencziálhányadosaira nézve egész kifejezések lesznek. A $\frac{d}{dx}$, $\frac{d}{dy}$ operáczióknál föllépő $r, \ldots, p_{2,k}, \ldots, p_{2,n-2}$-nek együtthatója a (2.)-ben az egység, és igy értékök bevezetése nem hoz be törteket. Tehát még csak azon tagoknál történhetik, a hol a parcziális differencziálhányadosok $p_{2,n-1}$, $p_{1,n}$, $p_{o,n+1}$-gyel szorzandók, melyek helyébe a (8.) alatti értékek irandók. Hogy ez a Δ-vel szorzott tagokban nem történik, közvetetlenül világos. A többiekben e tagok:

$$\frac{-P_n\left(P_{n-1}\frac{\partial\Delta}{\partial p_{1,n-1}} + P_n\frac{\partial\Delta}{\partial p_{o,n}}\right) + P_{n-1}\left(P_n\frac{\partial\Delta}{\partial p_{1,n-1}} + P_{n+1}\frac{\partial\Delta}{\partial p_{o,n}}\right)}{\Delta} =$$

$$= -\frac{\partial\Delta}{\partial p_{o,n}} \cdot \frac{P_{n-1}P_{n+1} - P_n^2}{\Delta}$$

$$\frac{-P_{n+1}\left(P_{n-1}\frac{\partial\Delta}{\partial p_{1,n-1}}+P_n\frac{\partial\Delta}{\partial p_{on}}\right)+P_n\left(P_n\frac{\partial\Delta}{\partial p_{1,n-1}}+P_{n+1}\frac{\partial\Delta}{\partial p_{on}}\right)}{\Delta}=$$

$$=-\frac{\partial\Delta}{\partial p_{1,n-1}}\;\frac{P_{n-1}P_{n+1}-P_n^2}{\Delta}.$$

és itt a $P_{n-1}P_{n+1}-P_n^2$, a mint a sorozat egyszerű kifejtése mutatja, mindig osztható Δ-val.

A (9.) alatti alakban, hol Δ^2-tel szoroztunk, tehát csak a $\Delta=0$ elsőrendű parcziális differencziálegyenlet megoldásai lépnek még hozzá. Ezen, az egyenletek alakjából tüstént kiolvasható $\Delta=0$ megoldásoknak épen az a kivételes szerepök lesz, mint a megelőzőleg tárgyalt egyszerűbb analog esetben.

A (9.) alatt álló alakok különben oly másodrendű parcziális differencziálegyenleteket adnak az u meghatározására, melyeknek többtagúja az u-t nem tartalmazza, az u összes differencziálhányadosainak egész, a második differencziálhányadosoknak lineár függvénye, mig független változók gyanánt, $z, p, q, s, t, \ldots, p_{1,k-1}, p_{o,k}, \ldots p_{1,n-1}, p_{on}$ szerepelnek.

5. *Az u számára nyert két föltétel ismét egy egyetlen differencziálegyenletben egyesíthető.* Bebizonyíthatjuk ismét, hogy *ha $p_{2,n-1}, p_{1,n}, p_{o\,n+1}$ kielégitik a (3.) rendszert, akkor mindig:*

$$\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}\left(\frac{d}{dx}p_{1,n}-\frac{d}{dy}p_{2,n-1}\right)+\frac{\partial u}{\partial p_{o,n}}\left(\frac{d}{dx}p_{o,n+1}-\frac{d}{dy}p_{1,n}\right)=0. \quad (10)$$

Föltételezve először is, hogy $\frac{\partial u}{\partial p_{o,n}}$ nem 0, a (3.)-ból nyerjük:

$$-p_{o,n+1}=\frac{\left(\frac{du}{dy}\right)+\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}p_{1n}}{\frac{\partial u}{\partial p_{on}}},$$

$$-p_{1,n}=\frac{\left(\frac{du}{dx}\right)+\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}p_{2,n-1}}{\frac{\partial u}{\partial p_{on}}}$$

Ezeket differencziálva és a differencziálhányados második tagjába bevezetve $\left(\frac{du}{dx}\right)$ és $\left(\frac{du}{dy}\right)$ értékét a (3.) rendszer utolsó egyenleteiből:

$$\frac{d}{dx}p_{o,n+1} = \frac{\frac{d}{dx}\left[\left(\frac{du}{dy}\right) + \frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}p_{1,n}\right] + p_{o,n+1}\frac{d}{dx}\frac{\partial u}{\partial p_{o,n}}}{\frac{\partial u}{\partial p_{o,n}}},$$

$$\frac{d}{dy}p_{1,n} = \frac{\frac{d}{dy}\left[\left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}p_{2,n-1}\right] + p_{1,n}\frac{d}{dy}\frac{\partial u}{\partial p_{o,n}}}{\frac{\partial u}{\partial p_{o,n}}},\tag{11}$$

hol a $\left(\frac{du}{dx}\right)$ és $\left(\frac{du}{dy}\right)$ jelentése részleten kiirva:

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = \frac{\partial u}{\partial x} + p\frac{\partial u}{\partial z} + r\frac{\partial u}{\partial p} + s\frac{\partial u}{\partial q} + \ldots + p_{2,k}\frac{\partial u}{\partial p_{1\,k}} + $$
$$+ p_{1,k+1}\frac{\partial u}{\partial p_{o,k+1}} + \ldots + p_{2,n-2}\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-2}} + p_{1,n-1}\frac{\partial u}{\partial p_{o,n-1}},$$
$$\tag{12}$$
$$\left(\frac{du}{dy}\right) = \frac{\partial u}{\partial y} + q\frac{\partial u}{\partial z} + s\frac{\partial u}{\partial p} + t\frac{\partial u}{\partial q} + \ldots + p_{1,k+1}\frac{\partial u}{\partial p_{1,k}} + $$
$$+ p_{o,k+2}\frac{\partial u}{\partial p_{o,k+1}} + \ldots + p_{1,n-1}\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-2}} + p_{o,n}\frac{\partial u}{\partial p_{o,n-1}}$$

a hol ismét $r, \ldots, p_{2,k}, \ldots, p_{2,n-2}$ értékei az (1.), (2.) és (3.) egyenletekből veendők.

A differencziálások végrehajtása által ismét a következő identitásokat nyerjük:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{du}{dy}\right) + \frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}p_{1,n}\right] + p_{o,n+1}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial p_{o,n}} =$$
$$= \frac{d}{dy}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}\frac{\partial p_{1,n}}{\partial x}$$

$$p\frac{\partial}{\partial z}\left[\left(\frac{du}{dy}\right) + \frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}p_{1,n}\right] + p_{o,n+1}\,p\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial p_{o,n}} =$$
$$= \frac{d}{dy}\left(p\frac{\partial u}{\partial z}\right) - s\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}p\frac{\partial p_{1\,n}}{\partial z},$$

$$r\frac{\partial}{\partial p}\left[\left(\frac{du}{dy}\right)+\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}p_{1,n}\right]+p_{o,n+1}\,r\frac{\partial}{\partial p}\frac{\partial u}{\partial p_{o,n}}=$$
$$\frac{d}{dy}\left(r\frac{\partial u}{dp}\right)-p_{2,1}\frac{\partial u}{\partial p}+\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}\,r\frac{\partial p_{1,n}}{\partial p},$$

$$s\frac{\partial}{\partial q}\left[\left(\frac{du}{dy}\right)+\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}p_{1,n}\right]+p_{o,n+1}\,s\frac{\partial}{\partial q}\frac{\partial u}{\partial p_{o,n}}=$$
$$=\frac{d}{dy}\left(s\frac{\partial u}{\partial q}\right)-p_{12}\frac{\partial u}{\partial q}+s\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}\,s\frac{\partial p_{1,n}}{\partial q},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\qquad (13)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$p_{2,k}\frac{\partial}{\partial p_{1,k}}\left[\left(\frac{du}{dy}\right)+\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}p_{1,n}\right]+p_{o,n+1}p_{2,k}\frac{\partial}{\partial p_{1,k}}\frac{\partial u}{\partial p_{o,n}}=$$
$$=\frac{d}{dy}\left(p_{2,k}\frac{\partial u}{\partial p_{1,k}}-p_{2,k+1}\frac{\partial u}{\partial p_{1,k}}+p_{2,k}\frac{\partial u}{\partial p_{1,k-1}}+\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}p_{2,k}\frac{\partial p_{1,n}}{\partial p_{1,k}},\right.$$

$$p_{1,k+1}\frac{\partial}{\partial p_{o,k+1}}\left[\left(\frac{du}{dy}\right)+\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}p_{1,n}\right]+p_{o,n+1}p_{1,k+1}\frac{\partial}{\partial p_{o,k+1}}\frac{\partial u}{\partial p_{o,n}}=$$
$$=\frac{d}{dy}\left(p_{1,k+1}\frac{\partial u}{\partial p_{o,k+1}}\right)-p_{1,k+2}\frac{\partial u}{dp_{o,k+1}}+p_{1,k+1}\frac{\partial u}{\partial p_{o,k}}+$$
$$+\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}p_{1,k+1}\frac{\partial p_{1,n}}{\partial p_{o,k+1}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$p_{2,n-1}\frac{\partial}{\partial p_{1,n-1}}\left[\left(\frac{du}{dy}\right)+\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}p_{1,n}\right]+p_{o,n+1}p_{2,n-1}\frac{\partial}{\partial p_{1,n-1}}\frac{\partial u}{\partial p_{o,n}}=$$
$$=\frac{d}{dy}\left(p_{2,n-1}\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}\right)-\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}\frac{d}{dy}p_{2,n-1}+p_{2,n-1}\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-2}}+$$
$$+\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}p_{2,n-1}\frac{\partial p_{1,n}}{\partial p_{1,n-1}},$$

$$p_{1,n}\frac{\partial}{\partial p_{o,n}}\left[\left(\frac{du}{dy}\right)+\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}p_{1,n}\right]+p_{o,n+1}p_{1,n}\frac{\partial}{\partial p_{o,n}}\frac{\partial u}{\partial p_{o,n}}=\qquad (13)$$
$$=p_{1,n}\frac{d}{dy}\frac{\partial u}{\partial p_{1,n}}+p_{1,n}\frac{\partial u}{\partial p_{o,n-1}}+\frac{\partial u}{dp_{1,n-1}}p_{1,n}\frac{dp_{1,n}}{\partial p_{o,n}},$$

hol már felhasználtuk, hogy a (2.) értelmében

$$\frac{dp_{2,k}}{dy} = p_{2,k+1}$$

Összeadva a nyert egyenleteket, lesz:

$$\frac{d}{dx}\left[\left(\frac{du}{dy}\right) + \frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}} p_{1,n}\right] + p_{0,n+1}\frac{d}{dx}\frac{\partial u}{\partial p_{0,n}} =$$

$$= \frac{d}{dy}\left[\left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}} p_{2,n-1}\right] +$$

$$+ p_{1,n}\frac{d}{dy}\frac{\partial u}{\partial p_{0,n}} + \frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}\left(\frac{d}{dx}p_{1,n} - \frac{d}{dy}p_{2,n-1}\right),$$

a mi nem más, mint a (10.) alatt fölirt reláczió.

Ez akkor is helyes marad, midőn $\frac{\partial u}{\partial p_{0,n}} = 0$. Ekkor ugyanis a második tag eltünése miatt kell, hogy az első is magában elenyészszék. Ennek megfelelőleg valóban fönnáll a

$$\frac{d}{dx}p_{1,n} - \frac{d}{dy}p_{2,n-1} = 0$$

identitás. Most t. i. lesz:

$$-p_{2,n-1} = \frac{\left(\frac{du}{dx}\right)}{\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}},$$

$$-p_{1,n} = \frac{\left(\frac{du}{dy}\right)}{\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}},$$

és ebből

$$-\frac{d}{dy}p_{2,n-1} = \frac{\frac{d}{dy}\left(\frac{du}{dx}\right) + p_{2,n-1}\frac{d}{dy}\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}}{\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}},$$

$$-\frac{d}{dx}p_{1,n} = \frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dy}\right) + p_{1,n}\frac{d}{dx}\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}}{\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}},$$

Ha a (13.) alatti identitásokban most u alatt oly függvényt értünk, mely nem tartalmazza $p_{0,n}$-t, az összeállitási eredmény lesz:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dy}\right)+\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}p_{1,n}\right)=$$

$$=\frac{d}{dy}\left(\frac{du}{dx}\right)+\frac{d}{dy}\left(\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}p_{2,n-1}\right)+\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}\left(\frac{d}{dx}p_{1,n}-\frac{d}{dy}p_{2,n-1}\right),$$

vagyis, ha mindkét oldalon a második tag differencziálását elvégezzük és rövidítünk:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dy}\right)+p_{1,n}\frac{d}{dx}\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}=\frac{d}{dy}\left(\frac{du}{dx}\right)+p_{2,n-1}\frac{d}{dy}\left(\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}\right),$$

a mi nem más, mint az állitott egyenlet.

Ha most már a (10.)-ben $p_{2,n-1}$, $p_{1,n}$, $p_{0,n+1}$ értékeit behelyettesitjük és Δ^2-tel szorzunk, lesz:

$$\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}T_{n+1}+\frac{\partial u}{\partial p_{0,n}}T_{n-1}=0, \tag{14}$$

mely alak ismét *identitást* ad, mert minden u-ra nézve érvényes. Hogy t. i. azon u-*k* megfelelnek, melyek mint a $\Delta = 0$ megoldásai eddig ki voltak zárva, kitünik abból, hogy akkor T_{n-1} és T_{n+1} külön-külön 0.

Igy tehát itt is T_{n-1} minden tagja osztható $\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}$-gyel és T_{n+1} minden tagja $\frac{\partial u}{\partial p_{0,n}}$-nel.

Az u számára nyert két differencziálegyenlet

$$T_{n-1}=0,\quad T_{n+1}=0,$$

tehát így is irható:

$$\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}R=0,\quad \frac{\partial u}{\partial p_{0,n}}R=0,$$

és így *a (4.) rendszer föltétlenül integrálható lesz minden oly u függvény helyettesitésénél, mely az $R = 0$ másodrendü lineár differencziálegyenlet megoldása, de nem egyszersmind $\Delta = 0$ megoldása.*

IX.

Folytatás. — Totál differencziálegyenletekre visszavezethető egyenletosztályok. — A nyert integrálási módszerek összeállítása.

Abban az esetben, midőn

Δ *eltünik,*

az $r + f = 0$ és $u = a_1$ egyenleteknek csak akkor lehet közös megoldásuk, ha u egyszersmind az $S_1^{(n)}$ vagy $S_2^{(n)}$ rendszerek megoldása. Ekkor a $p_{o,n+1}$ szabadon választható és még mindig találni a többi $n+1$-edrendű p-kre oly értékeket, melyek a (3.)-nak megfelelnek. A (4.) rendszer pedig föltétlenül integrálható lesz, ha

$$\frac{d}{dx} p_{o,n+1} - \frac{d}{dy} p_{1,n} = 0, \tag{15}$$

A (15.) most föltétel a $p_{o,n+1}$ meghatározására. Ugyanis a (3.) szerint

$$-p_{1,n} = \frac{\left(\frac{du}{dy}\right) + \frac{\partial u}{\partial p_{o,n}} p_{o,n+1}}{\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}}$$

$$-p_{2,n-1} = \frac{\left(\frac{d^{n-1}f}{dy^{n-1}}\right)\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}} - \frac{\partial f}{\partial s}\left(\frac{du}{dy}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}} - \frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial u}{\partial p_{o,n}}\right) p_{o,n+1}}{\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}},$$

Ha a $p_{1,n}$ ezen értékét (15.)-be beviszszük és a $\frac{d}{dx}$, $\frac{d}{dy}$ operácziók kifejtésénél $p_{1,n}$ és $p_{2,n-1}$ értékeit az utolsó egyenletekből veszszük, *elsőrendű parcziális differencziálegyenletet nye-*

rünk $p_{o,n+1}$ *számára,* mely ezt meghatározza mint az $x, y, z,$ $p, q, \dots, p_{1,n-1}, p_{o,n}$ függvényét. *A* $p_{o,n+1}$ *minden egyes ily értéke, mely az igy értelmezett (15.) differencziálegyenletet kielégíti, föltététlenül integrálhatóvá teszi a (4.)-et, és igy az* $r + f = 0$ *egy teljes integrálját adja.*

7. Az eddig nyert eredmények kiegészitésére, különösen a nyert integrálok terjedelmének megitélésére még csak azon tételek általánositása szükséges, melyeket az első fejezetekben nyertünk. Az eljárás olyannyira azonos az ott használttal, hogy a főeredményeknek egyszerű kijelölése elégséges lesz:

Feltétlenül integrálhatónak nevezzük az

$$
\begin{aligned}
& r + f(s, t) = 0 && (16)\\
& u(x, y, z, p, q, s, t, \dots, p_{1,k-1}, p_{o,k}, \dots, p_{1,n-1}, p_{o,n}) = a_1 \\
& v(x, y, z, p, q, s, t, \dots, p_{1,k-1}, p_{o,k}, \dots, p_{1,n-1}, p_{o,n}) = a_2
\end{aligned}
$$

rendszert, ha a következő föltételek identice vannak kielégitve:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial p_{o,n}}\left(\frac{dv}{dx}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial s}\,\frac{\partial u}{\partial p_{o,n}} - \frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}\,\frac{\partial f}{\partial t}\right)\left(\frac{dv}{dy}\right) - \\
&- \left[\left(\frac{d^{n-1}f}{dy^{n-1}}\right)\frac{\partial u}{\partial p_{o,n}} - \frac{\partial f}{\partial t}\left(\frac{du}{dy}\right)\frac{\partial v}{\partial p_{1,n-1}}\right]\frac{\partial v}{\partial p_{1,n-1}} + \\
&+ \left(\frac{d^{n-1}f}{dy^{n-1}}\right)\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}} - \frac{\partial f}{\partial s}\left(\frac{du}{dy}\right) - \left(\frac{du}{dx}\right)\Bigg]\frac{\partial v}{\partial p_{o,n}} = 0, \qquad (17)
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}\left(\frac{dv}{dx}\right) + \frac{\partial u}{\partial p_{o,n}}\left(\frac{dv}{dy}\right) - \left(\frac{du}{dx}\right)\frac{\partial v}{\partial p_{1,n-1}} - \left(\frac{du}{dy}\right)\frac{\partial v}{\partial p_{o,n}} = 0.
$$

Ez ugyanis a szükséges és elegendő föltétel arra, hogy a (16.)-nak eleget tegyen a z-nek oly függvényalakja, mely a_1 *és* a_2 *beszámitásával* $2n + 1$ *tetszőleges állandót tartalmaz.*

A z ezen értéke kiszámitható a következő totál differencziálegyenletrendszerből:

$$\frac{dz}{dx} = p, \quad \frac{dz}{dy} = q,$$

$$\frac{dp}{dx} = r, \quad \frac{dp}{dy} = s; \quad \frac{dq}{dx} = s, \quad \frac{dq}{dy} = t$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (18)$$

$$\frac{dp_{1,k-1}}{dx} = p_{2,k-1}, \quad \frac{dp_{1,k-1}}{dy} = p_{1,k}; \quad \frac{dp_{0,k}}{dx} = p_{1,k}, \quad \frac{dp_{0,k}}{dy} = p_{0,k+1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{dp_{1,n-2}}{dx} = p_{2,n-2}, \quad \frac{dp_{1,n-2}}{dy} = p_{1,n-1}; \quad \frac{dp_{0,n-1}}{dx} = p_{1,n-1}, \quad \frac{dp_{0,n-1}}{dy} p_{0,n},$$

melyben $p_{1,n-1}$ és $p_{0,n}$ a következő egyenletrendszer megoldásai:

$$\left(\frac{d^{n-2}f}{dy^{n-2}}\right) + p_{2,n-2} + \frac{\partial f}{\partial s} p_{1,n-1} + \frac{\partial f}{\partial t} p_{0,n} = 0,$$

$$u = a_1, \quad v = a_2,$$

míg $r, \ldots, p_{2,k-1}, \ldots$ az $r + f = 0$ egyenletből és deriváltjaiból veendő. Így értelmezve a (18.)-at, ez valóban föltétlenül integrálható rendszer lesz és z-t megadja, mint a_1, a_2 és még $2n - 1$ (mindössze tehát $2n + 1$) tetszőleges állandót tartalmazó függvényt.

A nyert függvény az $r + f = 0$, $u = a_1$, $v = a_2$ egyenletek mindegyikének teljes integrálja, az előbb megállapitott értelemben.

Megforditva az $r + f = 0$-nak minden $2n - 4$-ed fajú integráljának, ha az a_1, a_2 állandókat általánosan, mint a föllépő $2n + 1$ állandó két tetszőleges függvényét megállapitottuk, egy-egy ily rendszer felel meg. Ha pedig a_2-t nem adjuk meg ily módon, az egy bizonyos teljes integrálhoz tartozó v alakok egy $2n + 3$ független változót tartalmazó és két egyenletből álló homogén lineár parcziális differencziálegyenlet-rendszer által vannak adva. E rendszer teljes rendszer, és igy v legáltalánosabb alakja:

$$v = \omega\,(a_1, a_2, \ldots, a_{2n+1}),$$

hol ω tetszőleges függvény, míg $a_1, a_2, \ldots, a_{2n+1}$ a $z, p, q, \ldots, p_{1,n-1}, p_{0,n}$ meghatározott függvényei.

Igy tehát minden u és v függvény, mely a (17.) rendszer megoldása, az $r + f = 0$ egy teljes integrálját adja.

Ismét két eset foroghat fenn a (17.) megoldásánál. Az u ugyanis lehet oly függvény, hogy

A) *A két egyenlet egy egyenlettel aequivalens, a mi megtörténhetik, ha* 1.) *a két egyenlet algebrailag egymásból következik, vagyis a v parcziális differencziálhányadosainak együtthatói a két egyenletben arányosak és* 2.) *ha az egyik egyenletből identitás lesz, azaz minden együtthatója eltünik.*

B) *A két egyenlet mint parcziális differencziálegyenletrendszer tekintve, a v-re nézve az integrabilitási föltételt kielégiti identice, azaz teljes rendszer.*

Ha a két egyenlet nem ad Jacobi-féle rendszert, u soha sem felelhet meg a föltételeknek, mert az ekkor meghatározandó v sem nyerheti azt az általános alakot, mely neki szükségkép megfelel, ha $r + f = 0$-nak és $u = a_1$-nek van közös teljes integrálјuk.

Az A) *eset akkor és csak akkor lép föl, ha u a következő rendszernek megoldása:*

$$\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}} \mu + \frac{\partial u}{\partial p_{0,n}} = 0,$$

$$\left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\mu + \frac{\partial f}{\partial s}\right)\left(\frac{du}{dy}\right) - \left(\frac{d^{n-1}f}{dy^{n-1}}\right) = 0,$$

ha μ ugyanis az $r + f = 0$ charakteristikus egyenletének egyik gyöke, azaz, ha u a már előbb $S_1^{(n)}$ és $S_2^{(n)}$-vel jelölt rendszerek egyikének megoldása.

A B) esetbe tartoznak mindazon u alakok, melyek az $R = 0$ egyenlet megoldásai, a nélkül, hogy egyszersmind a $\Delta = 0$ egyenletnek is megfelelnének.

Amaz u alakok, melyek az $R = 0$ megoldásai és megfelelnek $\Delta = 0$-nak is, de a nélkül, hogy a megfelelő S rendszer második egyenletét is kielégitik, nem adnak alkalmas megoldást, mert $u = a_1$, $v = a_2$ nem volnának megoldhatók $p_{1,n-1}$ és $p_{0,n}$ szerint.

Az $r + f = 0$ egyenletnek egy $2n - 4$-ed fajú teljes integrálja meg van adva, ha az $x = x_0$ esetére a z és p kezdőértékeit ζ és π-t megadjuk mint az y és $2n + 1$ tetszőleges állandó függvényeit. E megállapitás legczélszerűbben oly alakban történik, melyben explicite csak két állandó fordúl elő, a_1 és a_2, azaz a következő differencziálegyenlet-rendszer alakjában:

$$u_0\,(y, \zeta, \pi, \zeta', \pi', \zeta'', \ldots, \pi^{(n-1)}, \zeta^{(n)}) = a_1,$$
$$v_0\,(y, \zeta, \pi, \zeta', \pi', \zeta'', \ldots, \pi^{(n-1)}, \zeta^{(n)}) = a_2.$$

Ha u az $S^{(n)}$ rendszerek egyikének megoldása, az $r+f=0$, $u=a_1$ egyenleteknek közös integrálja minden oly megoldás, mely az

$$u\,(x_0, y, \zeta, \pi, \zeta', \pi', \zeta'', \ldots, \pi^{(n-1)}, \zeta^{(n)}) = a_1$$

relácziót kielégíti. Az adott u-nak megfelelő v alakokat ekkor ugyanis egy egyetlen differencziálegyenletből, a (17.) rendszer második egyenletéből nyerjük, melynek általános megoldása

$$v \equiv \varphi\,(a_1, a_2, \ldots, a_{2n+1}, a_{2n+2})$$

és melyben a tetszőleges φ függvény meghatározható úgy, hogy

$$(v)_{x=x_0} = v_0$$

legyen, hol v_0 szabadon választható.

Ha továbbá az $S^{(n)}$ rendszerek egyikének két független megoldása van, u_1 és u_2, akkor $\omega\,(u_1, u_2)$ is megoldás és a tetszőleges ω függvény úgy választható, hogy

$$[\omega\,(u_1, u_2)]_{x=x_0} = u_0$$

legyen, a hol u_0 szabadon választható, azaz az $r+f=0$-nak minden partikuláris integrálját, vagyis általános integrálját kapjuk.

8. E szerint az $r+f=0$ másodrendű parcziális differencziálegyenlet egy tetszőleges számú állandót tartalmazó integráljának meghatározására vonatkozó szabályok lesznek:

Adva lévén az

$$r+f=0$$

differencziálegyenlet, az (5.) és (6.) alatt értelmezett Δ, P_{n-1}, P_n, P_{n+1} kifejezések segítségével képezzük az

$$R = \frac{\left(\Delta \frac{dP_n}{dx} - P_n \frac{d\Delta}{dx}\right) - \left(\Delta \frac{dP_{n-1}}{dy} - P_{n-1} \frac{d\Delta}{dy}\right)}{\frac{\partial u}{\partial p_{0,n}}} =$$

$$= \frac{\left(\Delta \frac{dP_{n+1}}{dx} - P_{n+1} \frac{d\Delta}{dx}\right) - \left(\Delta \frac{dP_n}{dy} - P_n \frac{d\Delta}{dy}\right)}{\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}}} = 0$$

differencziálegyenletet, melyben u az ismeretlen függvény, $x, y, z, p, q, \ldots, p_{1,n-1}, p_{0,n}$ a független változók. E differencziálegyenlet minden partikuláris megoldása, mely nem egyszersmind megoldása a $\Delta = 0$ egyenletnek is, a vizsgált egyenletnek egy $2n + 1$ állandót tartalmazó teljes integrálját adja: Ha t. i. a (3.) alatti rendszerből $p_{2,n-1}, p_{1,n}, p_{0,n+1}$-et meghatározzuk és az ekkor föltétlenül integrálható (4.) rendszert integráljuk, ebből z-t mint $2n + 1$ állandót tartalmazó függvényt nyerjük, mely a keresett megoldás.

Ha u oly partikuláris megoldás, mely egyszersmind a $\Delta = 0$ megoldása is, a mi annyit jelent, hogy kielégíti az $S^{(n)}$ rendszerek egyikének első egyenletét, az $r + f = 0$ integrácziója végett visszatérünk a (17.) alatt fölállított rendszerhez, mely u-hoz oly v-t szolgáltat, hogy $r + f = 0$, $u = a_1$, $v = a_2$ föltétlenül integrálható legyen.

Ha u kielégíti az illető $S^{(n)}$ rendszer második egyenletét is, az e fejezet 7. pontjának végén adott eljárás értelmében az $r + f = 0$-nak végtelen sok a követelt számú állandóval biró teljes integrálját, azaz tetszőleges függvényt tartalmazó integrált nyerünk, két ilyen u-ból pedig az általános integrált. Ugyanerre vezet a $p_{0,n+1}$ meghatározása a (15.) elsőrendű differencziálegyenletből. Ekkor a hozzátartozó $p_{2,n-1}$ és $p_{1,n}$-et a (3.)-ból veszszük, a mi által a (4.) ismét mindig föltétlenül integrálható lesz.

Ha végre u csak a $\Delta = 0$, de egyik $S^{(n)}$ rendszernek sem megoldása, akkor az $u = a_1$, a kiegészítésül fölállítandó $v = a_2$-vel összefoglalva nem oldható meg $p_{1,n-1}$ és $p_{0,n}$ szerint, a (3.) pedig ellenmondást foglal magában, tehát közös teljes integrál nem létezik.

A meghatározandó teljes integrálnak és az $R = 0$ resolvens partikuláris integráljának kezdőértékei közt fönnálló kapcsolat pedig ismét ugyanazon módszerekkel meghatározható, mint az analog egyszerűbb esetben a VI. szak. 6. pontjában.

A VI. szak. végéhez csatolt jegyzetben már szó volt Darboux idevágó dolgozatáról, valamint ama kapcsolatról, mely Darboux eredményei és az itt előterjesztett vizsgálatok között fönnáll.

Fölemlitendő még M. Lévy-nek a »Comptes rendus-ben (1872. november, pag. 1094) foglalt közleménye, mely mint egy nagyobb, de egész mostanáig meg nem jelent értekezés kivonata szerepel. E közleményben néhány a másodrendü parcziális differencziálegyenletek elméletére vonatkozó tétel foglaltatik minden bizonyitás, sőt minden magyarázat nélkűl. E tételek, melyeknek jelentését csak a vizsgálatok befejezése után lehetett fölismernem, igen érdekes kiegészitését adják az itt előadott elméletnek.

Legjobbnak tartom, ha Lévy e tételeit itt szóról szóra idézem:

»Théorème I. — Les intégrales les plus générales des équations à différences partielles du second ordre, qu'il soit possible d'obtenir moyennant l'intégration de k systèmes successifs d'équations à différences ordinaires, comprenant chacun un nombre quelconque d'équations avec un pareil nombre de fonctions inconnues, sont celles dont les arbitraires relatives à l'une des caractéristiques de l'équation differentielle proposée[1]) n'entrent sous aucun signe d'intégration partielle, celles relatives à l'autre caractéristique pouvant être engagées sous de tels signes ou généralement se présenter d'un façon quelconque.

La proposition subsiste dans le cas où les deux caracté-

[1]) J'appellerai toujours caractéristique d'une equation différentielle partielle les quantités dont dépendent les fonctions arbitraires qui entrent dans son intégrale.

ristiques sont les mêmes. Les deux fonctions arbitraires de l'intégrale, si elle est générale, doivent dans ce cas, apparaître *distinctes*, l'une d'elles étant hors de tout signe d'intégration partielle, l'autre pouvant être engagée sous de tels signes.

Théorème II. — Inversement, toutes les fois qu'une équation à différences partielles du second ordre admet une intégrale de la forme qui vient d'être définie, elle peut être intégrée, c'est à dire que son intégration peut *effectivement* être ramenée à celles de k systémes successifs d'équations à différences ordinaires.

Théorème III. — Le nombre k des systèmes à intégrer est toujours et invariablement égal à trois, en sorte que la seule chose qui varie d'une intégrale à l'autre, c'est le nombre des équations que comprend chacun des trois systèmes à intégrer.«

A mint látni, Lévy tételei nem adnak módszert az integráczióra, hanem csak a totál differencziálegyenletek segítségével történendő integrálás lehetőségét állitják, valamint nem is adnak ismertető jelt arra nézve, vajjon egy adott differencziálegyenlet beletartozik-e az ily módon tárgyalható egyenletek osztályába, hanem csak az általános integrálok egy speciális alakját állapítja meg erre az esetre.

Vizsgálataink teljesen kitöltik a jelzett hézagot. Nagyon könnyen meggyőződünk ugyanis arról, hogy az általános integrálnak eme speciális alakja által jellemzett differencziálegyenletek minden esetre olyanok, melyekben az $S_1^{(n)}$ vagy $S_2^{(n)}$ rendszerek közűl legalább is egynek két egymástól független integrálja van. Viszont, mihelyt e rendszerek egyike ily módon megoldható, valóban megkapjuk az általános integrált 3 totál differencziálegyenlet-rendszer egymásután következő megoldása által. Az első ezek közül megadja az S rendszer integrálját, u-t, a második az u-hoz tartozó v-ket, a harmadik rendszer végre az, melyre visszavezetendő az

$$r + f = 0, \quad u = a_1, \quad v = a_2$$

föltétlenül integrálható rendszer tárgyalása.

Ha tehát Lévy tételei helyesek, *az utolsó fejezet teljes elméletét adja mindazon másodrendű és két független változót tar-*

talmazó differencziálegyenleteknek, melyek totál differencziálegyenletek segitségével integrálhatók.

A totál differencziálegyenletek segitségével történendő integráczió lehetőségére a föltétel ekkor egyszerűen, hogy az $S_1^{(n)}$ vagy $S_2^{(n)}$ rendszerek egyikének egy bizonyos véges meghatározott n-nél két egymástól független integrálja legyen. Az integráczió menete pedig az, melyet e fejezetben pontosan részleteztünk.

Az $R = 0$ resolvens részletes tanulmányozása, melynek eredményeit nem kivánom már e dolgozatba fölvenni, nagyon valószinűknek tüntetik fel ezen eredményeket. Azt lehetne ugyanis hinni, hogy az $R = 0$ másodrendű, de több független változót tartalmazó differencziálegyenletre ujból alkalmazva az itt megállapított módszereket, a mi minden nagyobb nehézség nélkül lehetséges, uj osztályait nyerjük a másodrendű és két független változót tartalmazó differencziálegyenleteknek, melyek ismét visszavezethetők totál differencziálegyenletekre. De a vizsgálat eredménye, hogy az $R^{(n)}$ resolvens ily vizsgálata csak a magasabb n-nek megfelelő S-rendszerek föltételére vezet vissza.

Az itt kifejtett módszerekkel tehát más másodrendű differencziálegyenlet nem is vezethető vissza totál differencziálegyenletekre.

Hogy Lévy úr minő értelmezésre gondol, midőn »a *legáltalánosabb* totál differencziálegyenletek segitségével nyerhető integrálokról« beszél, arról közleménye nem ad semmi felvilágositást. Fölötte kényes dolog egy bizonyos eljárásról bebizonyitani, hogy a legáltalánosabb, mely mellett más többé nem képzelhető, és azért is sajnálandó, hogy az értekezés, melynek e kérdésekre felelnie kellene, meg nem jelent!

X.

Az állandók variácziójának módszere.

1. Ismeretes, hogy az állandók variácziója módszerének az elsőrendű differencziálegyenleteknél minő fontos szerepe van. Segitségével egy tetszőleges teljes integrálból levezethetjük az általános integrált, még pedig úgy, hogy a szabadon választott kezdőértékkel biró integrál meghatározása csupán ismeretes műveletek végrehajtását követeli.

A felhozott tétel általánositása magasabb rendű differencziálegyenleteknél nem adja ugyan az integráczió folyamatának ily egyszerűsítését, a mennyiben általánosságban nem is a primitiv integrálokra, hanem az első integrálokra vonatkozik. Az $r+f=0$ első integrálja, mint ismeretes, az oly elsőrendű differencziálegyenlet

$$u\,(x, y, z, p, q) = 0,$$

melynek minden megoldása eleget tesz az $r+f=0$ egyenletnek is. Vajjon ilyen első integrálok léteznek és hogy melyek ezek, az ismeretes módon eldönthető a Monge-Ampère-féle módszerek segítségével.

Ha ezen első integrál $u=0$ két tetszőleges állandót (a-t és b-t) tartalmaz, és az $r+f=0$-on kivűl nincs másodrendű differencziálegyenlet, melynek első integrálja $u=0$, akkor az úgy nevezett *teljes első integrál,* melyből, mint Darboux idézett értekezésében jelezte, ha b-t az a tetszőleges függvényének veszszük,

$$b = \varphi\,(a)$$

és azután a-t a

$$\frac{\partial u}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial b}\,\varphi'\,(a) = 0$$

egyenletből meghatározzuk, bárhány új első integrált vezethetünk le. T. i. első integrál marad akkor is, ha a és b az x, y, z, p, q ily módon megállapitott függvényei.

Kapcsolatban eddigi vizsgálatainkkal, e tételek általánositása igen könnyű.

Ha t. i. az $u = a_1$ n-edrendű differencziálegyenletnek az adott másodrendű differencziálegyenlettel több mint egy (tehát végtelen sok) közös teljes integrálja van, az

$$r + f = 0, \; u = a_1$$

rendszert az $r + f = 0$, *$n - 2$-od fajú első integráljának* akarjuk nevezni. Ez teljesen jogosult elnevezés, mert az $r + f = 0$-nak e rendszerből definiált integráljainak sokasága megegyezik az egy elsőrendű differencziálegyenlet által adottal, és másodszor ezen integrál-sokaság meghatározása, mint tudjuk, elsőrendű parcziális differencziálegyenlet segítségével történik. Az u ekkor, mint tudjuk, az $S_1^{(n)}$ vagy $S_2^{(n)}$ differencziálegyenlet-rendszerek egyikének megoldása, és megfordítva minden u, mely e rendszerek megoldása, a most megállapított értelemben első integrált szolgáltat. Ha az $n = 1$ esetében az S-ek alatt a Monge-Ampère-féle módszereknél föllépő rendszereket értjük, az előbb fölhozott eset itt is mint legegyszerűbb bennfoglaltatik.

Közvetetlenűl világos, hogy tehát, ha u két tetszőleges állandót tartalmaz, ezen állandóknak a

$$b = \varphi(a), \quad \frac{\partial u}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial b} \varphi'(a) = 0$$

egyenletek által megállapított variácziója mindig ujból első integrált szolgáltat.

Egyáltalában, ha első integrálok léteznek, az ebben szereplő tetszőleges állandók variácziója nem más, mint az S rendszerek megoldásainak ily átalakitása, melyekre nézve, mint elsőrendű differencziálegyenletrendszerekre, ezen ismeretes tárgyalásokat nem szükséges bővebben kifejteni.

2. Ha az állandók variácziójának módszerét az $r + f = 0$ differencziálegyenletnek egy tetszőleges (0-odfajú) teljes integráljára

$$z = F(x, y, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$$

alkalmazzuk, nem nyerjük általánosságban az integráczió egyszerűsitését, hanem a probléma átalakitását, azaz uj resolvenseket a differencziálegyenlet megoldására.

A VII. szakaszban kifejtettek értelmében igen könnyen látni, hogy z adott alakja akkor és csak akkor marad az $r + f = 0$ integrálja, ha az a-k alatt oly függvényeit értjük x és y-nak, melyek eleget tesznek a következő egyenletrendszernek:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{d F}{d x}, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{d F}{d y}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{d^2 F}{d x^2}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{d^2 F}{d x d y}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{d^2 F}{d y^2}$$

hol a ∂ és d jelek különbsége egyszerűen az, hogy az elsőnél az a-k állandóknak, a másodiknál az x, y függvényeinek tekintendők.

Ha az itt követelt teljes differencziálásokat elvégezzük, ha továbbá a második differencziálhányadosok képezésénél az első sorban álló egyenletek alapján $\frac{dF}{dx}$ és $\frac{dF}{dy}$ helyett már $\frac{\partial F}{\partial x}$ és $\frac{\partial F}{\partial y}$-ból indulunk ki, és és a $\frac{d^2 F}{dx\,dy}$-nak ily módon keletkező két — algebrailag független — alakját külön-külön fölirjuk, a következő differencziál-egyenletrendszert nyerjük az a-k számára:

$$\sum_{i=1}^{i=5} \frac{\partial F}{\partial a_i} \frac{d a_i}{d x} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{i=5} \frac{\partial F}{\partial a_i} \frac{d a_i}{d y} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{i=5} \frac{\partial^2 F}{\partial a_i \partial y} \frac{d a_i}{d x} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{i=5} \frac{\partial^2 F}{\partial a_i \partial y} \frac{d a_i}{d y} = 0, \tag{1a}$$

$$\sum_{i=1}^{i=5} \frac{\partial^2 F}{\partial a_i \partial x} \frac{d a_i}{d x} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{i=5} \frac{\partial^2 F}{\partial a_i \partial x} \frac{d a_i}{d y} = 0,$$

mely egyenletek még, ha az $F, \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}$ függvények determinánsát a_r, a_s és a_t szerint $(r\, s\, t)$-vel jelöljük, az a_1, a_2, a_3 differencziálhányadosai szerint megoldott alakban[1]) a következők lesznek:

$$\frac{da_1}{dx} = \frac{(423)}{(123)}\frac{da_4}{dx} + \frac{(523)}{(123)}\frac{da_5}{dx}; \quad \frac{da_1}{dy} = \frac{(423)}{(123)}\frac{da_4}{dy} + \frac{(523)}{(123)}\frac{da_5}{dy},$$
$$\frac{da_2}{dx} = \frac{(431)}{(123)}\frac{da_4}{dx} + \frac{(531)}{(123)}\frac{da_5}{dx}; \quad \frac{da_2}{dy} = \frac{(431)}{(123)}\frac{da_4}{dy} + \frac{(531)}{(123)}\frac{da_5}{dy}, \quad (1)$$
$$\frac{da_3}{dx} = \frac{(412)}{(123)}\frac{da_4}{dx} + \frac{(512)}{(123)}\frac{da_5}{dx}; \quad \frac{da_3}{dy} = \frac{(412)}{(123)}\frac{da_4}{dy} + \frac{(512)}{(123)}\frac{da_5}{dy},$$

Igy tehát $z = F(x, y, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ akkor és csak akkor a másodrendü differencziálegyenletnek integrálja, ha az a-k az (1.) rendszernek megfelelő függvények és ha az (1.) rendszer minden megoldását veszszük, $z = F$ az adott differencziálegyenlet minden megoldását adja.

Az (1.) rendszer megoldása általánosságban az adott differencziálegyenlet integrácziójával aequivalens probléma, de a föladatnak e transformált alakja sokban hozzájárul az adott egyenlet szerkezetének és az integrálok közt létező kapcsolatnak földeritésére.

A föladatot pontosabban (és az általánosság megszoritása nélkül) úgy fogalmazhatjuk, hogy a *$z = F$-ből levezetendő a differencziálegyenletnek minden más teljes integrálja.* Ekkor keressük az a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 oly függvényalakjait, melyek ujból 5 tetszőleges állandót tartalmaznak. Ha föltételezzük az a-knak emez alakját és a differencziálhányadosokat képezzük, az uj tetszőleges állandók eliminácziója által 10 egyenletet nyerünk az a-k és differencziálhányadosaik közt, melyek képezésüknél fogva egy Mayer-féle föltétlenül integrálható rendszert alkotnak. E 10 egyenlet közül 6 ismeretes, t. i. az (1.) alatt álló egyenletek.

Két uj egyenlet — tehát a 7-ik és 8-ik — ehhez még egészen általánosan hozzácsatolható minden integrálási müvelet nélkül. Ha t. i. a

$$\frac{d^2 a_1}{dx\,dy}, \quad \frac{d^2 a_2}{dx\,dy}, \quad \frac{d^2 a_3}{dx\,dy}$$

[1]) Ha $z = F$ teljes integrál, az a-k sorrendjét mindig úgy választhatjuk, hogy $(1\,2\,3)$ ne tünjék el, vagyis az eszközlendő megoldás lehetséges.

értekeit az első és második egyenletsorozatból képezzük, akkor egyenleteink speciális alakjánál fogva ujból elsőrendű differencziálegyenleteket nyerünk az a-kra nézve. Ezek az egyenletek a következők:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dy}\frac{(423)}{(123)}\frac{da_4}{dx}-\frac{d}{dx}\frac{(423)}{(123)}\frac{da_4}{dy}+\frac{d}{dy}\frac{(523)}{(123)}\frac{da_5}{dx}-\frac{d}{dx}\frac{(523)}{(123)}\frac{da_5}{dy}=0,\\
&\frac{d}{dy}\frac{(431)}{(123)}\frac{da_4}{dx}-\frac{d}{dx}\frac{(431)}{(123)}\frac{da_4}{dy}+\frac{d}{dy}\frac{(531)}{(123)}\frac{da_5}{dx}-\frac{d}{dx}\frac{(531)}{(123)}\frac{da_5}{dy}=0, \qquad (2)\\
&\frac{d}{dy}\frac{(412)}{(123)}\frac{da_4}{dx}-\frac{d}{dx}\frac{(412)}{(123)}\frac{da_4}{dy}+\frac{d}{dy}\frac{(512)}{(123)}\frac{da_5}{dx}-\frac{d}{dx}\frac{(512)}{(123)}\frac{da_5}{dy}=0.
\end{aligned}
$$

Ez ugyan három egyenlet, de könnyű belátni, hogy közülük egy mindenkor a többinek algebrai következménye, úgy, hogy tényleg csak két uj egyenletet nyerünk. Valójában ugyanis kezdetben csak 5 egyenletünk volt, a hatodik pedig, melyet a symmetria kedveért már ott hozzácsatoltunk, onnét keletkezett, hogy a $\frac{d^2F}{dx\,dy}$ két különböző alakját használtuk. Ha az uj egyenleteket az (1a,) és nem az (1.) alakokból képezzük, az első sorban álló egyenletekből lesz:

$$
\Sigma \frac{\partial^2 F}{\partial a_i \partial y}\frac{da_i}{dx} = \Sigma \frac{\partial^2 F}{\partial a_i \partial x}\frac{da_i}{dy},
$$

a mi valóban a második sorban álló egyenletek kivonásának megfelelő eredmény. Az egyenletek algebrai átalakitása e viszonyokon nem változtathat [1]; a különbség csak az, hogy a megoldott alakok egyszerűbb voltának megfelelőleg már a (2.) alatt álló 3 egyenlet közül lesz egy a másik kettő algebrai következménye, ha az a_1, a_2, a_3 differencziálhányadosainak értékét (1.)-ból behelyettesítve gondoljuk.

Ha a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 az x és y-nak 5 tetszőleges állandót tartalmazó függvényei

$$
a_i = a_i\;(x, y, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5),
$$

[1]) Hogy a 9 egyenlet közül egy mindig a többinek algebrai következménye, az más számítás utján is bebizonyítható; de a hosszabb számítás részleteit nem tartjuk szükségesnek itt kifejteni.

akkor a

$$C = \text{Tetsz. függv. } (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5),$$

segitségével ebből egy

$$\Phi\,(x, y, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = C$$

reláczió keletkezík.

Az előbb kifejtett 8 egyenletből álló rendszer megfejtése tehát lényegben az ily $\Phi = C$ reláczió meghatározását követeli, mely p. a_5-öt ugy adja meg, hogy a rendszer most már föltétlenül integrálható legyen, tehát a C-hez még 4 állandó járul.

A $\Phi = C$ helyébe a vele egyértékű

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \Sigma \frac{\partial \Phi}{\partial a_i} \frac{d a_i}{d x} = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \Sigma \frac{\partial \Phi}{\partial a_i} \frac{d a_i}{d y} = 0$$

egyenletek tehetők, melyek a 8 adott egyenlettel együtt az a-k differencziálhányadosait, mint az x, y és az a-k függvényeit megadják. A föltétlen integrálhatóságra szükséges, hogy az a-k 5 tetszőleges állandót tartalmazzanak. Az integrabilitást föltételeinek száma tulajdonképen 5, de az egyenletek alakjánál fogva világos, hogy csak egyre redukálódnak, és *e föltétel*

$$\rho = o$$

nem más, mint lineáris másodrendű differencziálegyenlet Φ számára, melyben x, y, a_1, a_2, a_3, a_4. a_5 mint független változók szerepelnek.

Az ezen oldó egyenletekre vonatkozó számitásokat nem szükséges e helyen keresztűlvínni, a mennyiben könnyű látni, hogy *ugyanezt az előbb* (VI. szak.) *nyert általános $R = 0$ resolvensből is lehet nyerni oly transformáczió által, mely a fölvett $z = F$ teljes integrál által teljesen meg van adva.*

Ha t. i. z az adott differencziálegyenletnek bármely teljes integrálját jelenti, az (1.) és (2.)-ből álló bármely 5 tetszőleges állandót tartalmazó megoldását

$$z = F, \; p = \frac{\partial F}{\partial x}, \; q = \frac{\partial F}{\partial y}$$

$$s = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \tag{3}$$

egyenletek által lehet ábrázolni. Ha ezen egyenletek segitségével a $\Phi = C$-ből az a-kat elimináljuk, ez átmegy egy

$$u\,(x, y, z, p, q, s, t) = C$$

alaku relaczióba, hol u az $R = 0$ megoldása tartozik lenni, mert $u = C$ integráljai közt az $r + f = 0$ egyenlet egy teljes integrálja bennfoglaltatik. *A (3.) rendszer tehát azon átalakitási képleteket szolgáltatja,* melyek segítségével az $R = 0$ és $\rho = 0$ differencziálegyenletek egyikétől átmegyünk a másikhoz az a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 és z, p, q, s, t *független változók* fölcserélése által.

A több mint 5 tetszőleges állandót tartalmazó teljes integrálokhoz teljesen hasonló elmélet füződik, melyet azonban, minthogy módszerek és eredmények az eddigiek után is könynyen áttekinthetők, e helyen nem kivánjuk részletezni.

3. Speczialis egyenletosztályoknál az *a-k* számára nyert egyenletrendszer egyszerűbben tárgyalható. Ez természetesen mindenkor kapcsolatban áll az $R = 0$ resolvens alkatával. Itt csak az

$$Ar + Bs + Ct + Dp + Eq + Fz = 0$$

alakú egyenletek legyenek még felemlítve, melyekre nézve, ha ismeretes egy teljes integrál, mely akkor

$$z = a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_2 + a_3 \lambda_3 + a_4 \lambda_4 + a_5 \lambda_5$$

alakú, a (2.) alatti egyenletek az a_4 és a_5 számára két elsőrendű simultán parcziális differencziálegyenletet adnak. Ha tehát a_4 és a_5 a (2.) bármely megoldását jelentik, az (1.) föltétlenül integrálható lesz. (2.)-ből p. a_5 számára egy másodrendű és minden differencziálhányadosra nézve lineáris, de magát a_5-öt nem tartalmazó differencziálegyenletet nyerünk, a mi a föladatnak lényeges egyszerűsitését adja.

Talán nem egész fölösleges a Lagrange által tárgyalt egyik differencziálegyenleten [1]) megmutatni, hogy az itt adott elmélet alapján mikép történik az állandók variácziója szemben a Lagrange által adott eljárással, melyről maga mondja, hogy »plus curieuse qu'utile.«

Az adott differencziálegyenlet

$$t - m\, r = 0,$$

melynek teljes integrálja

$$z = a_1 + a_2\, x + a_3\, y + a_4\, (x^2 + m\, y^2) + a_5\, x\, y.$$

Az (1.) alatti egyenletek tehát:

$$\begin{aligned}
\frac{d a_1}{d x} + x\frac{d a_2}{d x} + y\frac{d a_3}{d x} + (x^2 + m y^2)\frac{d a_4}{d x} + x y\frac{d a_5}{d x} &= 0,\\
\frac{d a_3}{d x} + 2 m y\frac{d a_4}{d x} + x\frac{d a_5}{d x} &= 0,\\
\frac{d a_2}{d x} + 2 x\frac{d a_4}{d x} + y\frac{d a_5}{d x} &= 0.
\end{aligned}$$

és az e rendszerből keletkező egyenletek, ha a differencziálhányadosokban mindig x helyett y-t irunk. Vagyis megoldva az a_1, a_2, a_3-nak differencziálhányadosai szerint:

$$\begin{aligned}
\frac{d a_1}{d x} &= (x^2 + m y^2)\frac{d a_4}{d x} + x y\frac{d a_5}{d x}; & \frac{d a_1}{d y} &= (x^2 + m y^2)\frac{d a_4}{d y} + x y\frac{d a_5}{d y},\\
\frac{d a_2}{d x} &= -2 x\frac{d a_4}{d x} - y\frac{d a_5}{d x}; & \frac{d a_2}{d y} &= -2 x\frac{d a_4}{d y} - y\frac{d a_5}{d y},\\
\frac{d a_3}{d x} &= -2 m y\frac{d a_4}{d x} - x\frac{d a_5}{d x}; & \frac{d a_3}{d y} &= -2 m y\frac{d a_4}{d y} - x\frac{d a_5}{d y}.
\end{aligned}$$

Ebből a (2.)-nek megfelelő egyenletek

$$\begin{aligned}
2 m y\frac{d a_4}{d x} + x\frac{d a_5}{d x} &= 2 x\frac{d a_4}{d y} + y\frac{d a_5}{d y},\\
-\frac{d a_5}{d x} &= -2\frac{d a_4}{d y}\\
2 m\frac{d a_4}{d x} &= -\frac{d a_5}{d y},
\end{aligned}$$

[1]) »Sur les intégrales particulières des équations differentielles.« Oeuvres de Lagrange, Tome IV., pag. 48 (art. 65).

melyek közül — mint kell — egy mindenkor a másik kettő következménye. Ha t. i. a második egyenletet x-szel, a harmadikat y-nal szorozzuk és az elsőhöz hozzáadjuk, identikus eredményt nyerünk.

Az első egyenlet kihagyása után tehát a_4 és a_5 meghatározandó a következő rendszerből:

$$\frac{d a_5}{d x} = 2 \frac{d a_4}{d y}; \quad \frac{d a_5}{d y} = 2 m \frac{d a_4}{d x},$$

a miből

$$\frac{d^2 a_5}{d y^2} = m \frac{d^2 a_5}{d x^2},$$

azaz a_5 helyébe az eredeti differencziálegyenlet minden megoldása tehető. Különben az a_4 és a_5 számára nyert rendszer visszavezethető elsőrendű differencziálegyenlet megoldására. T. i. a két egyenletből, ha ezeket még a

$$\frac{d a_5}{d x} = 2 \frac{d a_4}{d y},$$

$$2 \sqrt{m} \frac{d a_4}{d x} = \frac{1}{\sqrt{m}} \frac{d a_5}{d y}$$

alakban irjuk, összeadás és kivonás által a következőket nyerjük:

$$\frac{d(a_5 + 2\sqrt{m}\, a_4)}{d x} = \frac{1}{\sqrt{m}} \frac{d(a_5 + 2\sqrt{m}\, a_4)}{d y},$$

$$\frac{d(a_5 - 2\sqrt{m}\, a_4)}{d x} = -\frac{1}{\sqrt{m}} \frac{d(a_5 - 2\sqrt{m}\, a_4)}{d y},$$

Ezeknek általános megoldása

$$a_5 + 2\sqrt{m}\, a_4 = \varphi(x + \sqrt{m}\, y),$$

$$a_5 - 2\sqrt{m}\, a_4 = \psi(x - \sqrt{m}\, y),$$

hol φ és ψ tetszőleges függvényeket jelentenek, és ebből

$$a_5 = \varphi(x + \sqrt{m}\, y) + \psi(x - \sqrt{m}\, y),$$

hol az $\frac{1}{2}$ tényező a φ és ψ-be fölvéve gondolható.

De ebből végre, minthogy a_5 és z számára a differencziálegyenlet ugyanaz, a keresett általános integrál

$$z = \varphi(x + \sqrt{m}\, y) + \psi(x - \sqrt{m}\, y).$$

4. Teljesség kedveért álljon még itt rövid jellemzése egy másik, az állandók variácziójára szolgáló módszernek, mely a resolvens egyenletnek ismét más alakjához vezet. Az adott $r + f = 0$ egy teljes integrálja megadható azon föltétlenül integrálható rendszer által, melynek egyenletei:

$$r + f = 0,$$
$$u = a_1,$$
$$v = a_2,$$

vagy pedig r, s, t szerint megoldva:

$$r = \varphi_1(x, y, z, p, q, a_1, a_3),$$
$$s = \varphi_2(x, y, z, p, q, a_1, a_2),$$
$$t = \varphi_3(x, y, z, p, q, a_1, a_2).$$

Minden teljes integrál e rendszer által ábrázolható, ha a_1 és a_2 az x, y, z, p, q kellően választott és két tetszőleges állandót tartalmazó függvényeit jelentik, míg pedig, mint az e munkálat elején kifejtett integrabilitási föltételekből minden nehézség nélkül következik, az a_1 és a_2 a következő *elsőrendű simultán differencziálegyenlet-rendszer megoldásai tartoznak lenni:*

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial a_1}\frac{d a_1}{d y} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial a_2}\frac{d a_2}{d y} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial a_1}\frac{d a_1}{d x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial a_2}\frac{d a_2}{d x},$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial a_1}\frac{d a_1}{d y} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial a_2}\frac{d a_2}{d y} = \frac{\partial \varphi_3}{\partial a_1}\frac{d a_1}{d x} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial a_2}\frac{d a_2}{d x},$$

hol a $\frac{d}{dx}$ és $\frac{d}{dy}$ operácziók jelentése ismét:

$$\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + p\frac{\partial}{\partial z} + \varphi_1\frac{\partial}{\partial p} + \varphi_2\frac{\partial}{\partial q},$$

$$\frac{d}{dy} = \frac{\partial}{\partial y} + q\frac{\partial}{\partial z} + \varphi_2\frac{\partial}{\partial p} + \varphi_3\frac{\partial}{\partial q}.$$

TARTALOM.